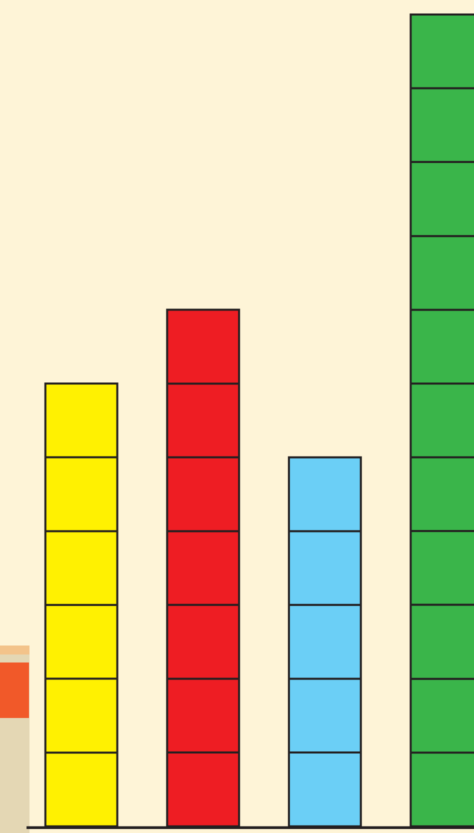
وزارت معارف

ریاضی

صنف ۸

صنف ۸





۱۳۹۹ ه.ش



سرود ملی

دا وطن افغانستان دی
دا عزت د هر افغان دی
کور د سولې کور د تورې
هر بچی یې قهرمان دی
دا وطن د ټولو کور دی
د بلوڅو د ازبکو
د پښتون او هزاره وو
د ترکمنو د تاجکو
ورسره عرب، گوجر دي
پامیریان، نورستانیان
براهوي دي، قزلباش دي
هم ایماق، هم پشه یان
دا هېواد به تل ځلیږي
لکه لمر پر شنه آسمان
په سینه کې د آسیا به
لکه زړه وي جاویدان
نوم د حق مو دی رهبر
وایو الله اکبر وایو الله اکبر

بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی
صنف ۸

۱۳۹۹

ه.ش

مشخصات کتاب

مضمون: ریاضی

مؤلفان: گروه مؤلفان کتاب‌های درسی دیپارتمنت ریاضی نصاب تعلیمی

ویراستاران: اعضای دیپارتمنت ویراستاری و ایدیت زبان دری

صنف: هشتم

زبان متن: دری

انکشاف دهنده: ریاست عمومی انکشاف نصاب تعلیمی و تالیف کتب درسی

ناشر: ریاست ارتباط و آگاهی عامهٔ وزارت معارف

سال چاپ: ۱۳۹۸ هجری شمسی

مکان چاپ: کابل

چاپ‌خانه:

ایمیل آدرس: curriculum@moe.gov.af

پیام وزیر معارف

اقرأ باسم ربک

سپاس و حمد بیکران آفریدگار یکتایی را که بر ما هستی بخشید و ما را از نعمت بزرگ خواندن و نوشتن برخوردار ساخت، و درود بی‌پایان بر رسول خاتم- حضرت محمد مصطفی ﷺ که نخستین پیام الهی بر ایشان «خواندن» است.

چنانچه بر همه‌گان هویداست، سال ۱۳۹۷ خورشیدی، به نام سال معارف مسمی گردید. بدین ملحوظ نظام تعلیم و تربیت در کشور عزیز ما شاهد تحولات و تغییرات بنیادینی در عرصه‌های مختلف خواهد بود؛ معلم، متعلم، کتاب، مکتب، اداره و شوراهای والدین، از عناصر شش‌گانه و اساسی نظام معارف افغانستان به شمار می‌روند که در توسعه و انکشاف آموزش و پرورش کشور نقش مهمی را ایفا می‌نمایند. در چنین برهۀ سرنوشت‌ساز، رهبری و خانوادۀ بزرگ معارف افغانستان، متعهد به ایجاد تحول بنیادی در روند رشد و توسعه نظام معاصر تعلیم و تربیت کشور می‌باشد.

از همین‌رو، اصلاح و انکشاف نصاب تعلیمی از اولویت‌های مهم وزارت معارف پنداشته می‌شود. در همین راستا، توجه به کیفیت، محتوا و فرایند توزیع کتاب‌های درسی در مکاتب، مدارس و سایر نهادهای تعلیمی دولتی و خصوصی در صدر برنامه‌های وزارت معارف قرار دارد. ما باور داریم، بدون داشتن کتاب درسی باکیفیت، به اهداف پایدار تعلیمی در کشور دست نخواهیم یافت.

برای دستیابی به اهداف ذکرشده و نیل به یک نظام آموزشی کارآمد، از آموزگاران و مدرسان دلسوز و مدیران فرهیخته به‌عنوان تربیت کننده‌گان نسل آینده، در سراسر کشور احترامانه تقاضا می‌گردد تا در روند آموزش این کتاب درسی و انتقال محتوای آن به فرزندان عزیز ما، از هر نوع تلاشی دریغ نورزیده و در تربیت و پرورش نسل فعال و آگاه با ارزش‌های دینی، ملی و تفکر انتقادی بکوشند. هر روز علاوه بر تجدید تعهد و حس مسؤولیت پذیری، با این نیت تدریس راآغاز کنند، که در آیندۀ نزدیک شاگردان عزیز، شهروندان مؤثر، متمدن و معماران افغانستان توسعه یافته و شکوفا خواهند شد.

همچنین از دانش آموزان خوب و دوست داشتنی به مثابه ارزشمندترین سرمایه‌های فردای کشور می‌خواهم تا از فرصت‌ها غافل نبوده و در کمال ادب، احترام و البته کنجکاوی علمی از درس معلمان گرامی استفادۀ بهتر کنند و خوشه چین دانش و علم استادان گرامی خود باشند.

در پایان، از تمام کارشناسان آموزشی، دانشمندان تعلیم و تربیت و همکاران فنی بخش نصاب تعلیمی کشور که در تهیه و تدوین این کتاب درسی مجدانه شبانه روز تلاش نمودند، ابراز قدردانی کرده و از بارگاه الهی برای آن‌ها در این راه مقدس و انسان‌ساز موفقیت استدعا دارم.

با آرزوی دستیابی به یک نظام معارف معیاری و توسعه‌یافته، و نیل به یک افغانستان آباد و مترقی دارای شهروندان آزاد، آگاه و مرفه.

دکتور محمد میرویس بلخی

وزیر معارف

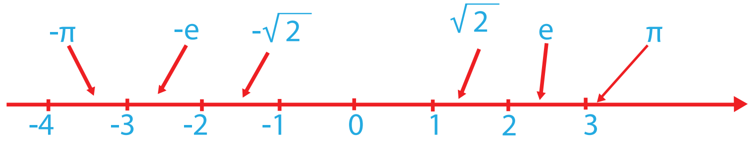
فهرست

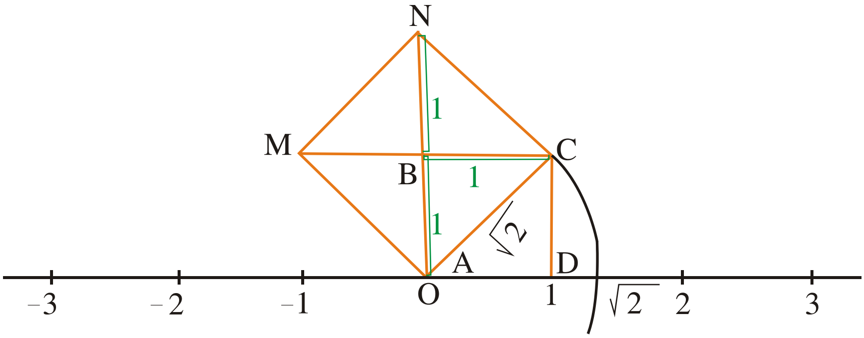
عناوین	صفحه
فصل اول(اعداد حقیقی)	**۱**
مفهوم اعداد حقیقی و خواص آن‌ها	۳
طریقهٔ عمومی استخراج جذر مربع تقریبی، اوسط و جذر دوم اعداد اعشاریه دار	۱۱
عملیات بالای اعداد جذر دار (جمع، تفریق، ضرب و تقسیم)	۱۹
قوانین اعداد توان‌دار (ضرب، تقسیم، توان صفر و منفی)	۲۳
توان‌های کسری و قوانین آن، ناطق کردن کسرها	۲۹
نکات مهم فصل اول	۳۳
فصل دوم(محاسبات مالی)	**۳۷**
نسبت، تقسیم به اجزای متناسبه	۳۹
تناسب، خواص تناسب، انواع تناسب، تناسب مرکب	۴۳
فیصد، احدیت، تخفیف	۵۵
ربح ساده و مرکب	۶۱
نکات مهم فصل دوم	۶۳
فصل سوم(مشابهت)	**۶۷**
اشکال متشابه، مضلعات متشابه	۶۹
قضیهٔ خطوط موازی با فاصله های مساوی، قضیهٔ تالس و معکوس آن	۷۳
قضیهٔ تالس درمثلث، حالت های تشابه مثلث ها	۷۷
نکات مهم فصل سوم	۸۵
فصل چهارم(تناظر)	**۸۹**
مفهوم تناظر، تناظر محوری، تناظر مرکزی	۹۱
نکات مهم فصل چهارم	۹۷
فصل پنجم (قضایای مثلث)	**۹۹**
قضایای مثلث متساوی الساقین	۱۰۱
قضیهٔ فیثاغورث، عکس قضیهٔ فیثاغورث	۱۰۵
قضایای مثلث قایم الزاویه، قضایا در مثلث قایم الزاویه برای زوایای 30° و 60°	۱۱۱
ناصف الزاویه، ناصف الزاویه های داخلی مثلث، ناصف عمودی در یک مثلث	۱۱۹
ارتفاع های مثلث، میانه های مثلث	۱۲۷
نکات مهم فصل پنجم	۱۳۱
فصل ششم (مساحت ها و احجام)	**۱۳۵**
مساحت و حجم مکعب مستطیل، دریافت قطر مکعب مستطیل و مکعب	۱۳۷
مساحت و حجم منشور، مساحت و حجم استوانه	۱۴۱
مساحت و حجم هرم	۱۴۵
مساحت و حجم مخروط، مساحت و حجم کره	۱۴۹
نکات مهم فصل ششم	۱۵۳

عناوین	صفحه
فصل هفتم(افاده‌های الجبری)	**۱۵۷**
مفهوم متحول، افاده‌های الجبری، ساده کردن افاده‌های الجبری	۱۵۹
ضرب افاده‌های یک حده، تقسیم افاده‌های یک حده، ضرب افاده‌های الجبری	۱۶۵
مطابقت‌ها، مربع مجموع و تفاضل افاده‌های دو حده، تجزیهٔ افاده‌های الجبری	۱۷۱
نکات مهم فصل هفتم	۱۷۷
فصل هشتم(معادلات)	**۱۸۱**
مفهوم معادله، عملیه‌های جمع و تفریق در مساوات، عملیه های ضرب و تقسیم در مساوات	۱۸۳
معادلهٔ عمومی درجه یک یک مجهوله، معادلات معادل و تشکیل معادلات	۱۸۹
نکات مهم فصل هشتم	۱۹۵
فصل نهم(رابطه و تابع)	**۱۹۹**
نقطه در مستوی، مختصات یک نقطه در مستوی، مجهول و متحول	۲۰۱
رابطه، رابطهٔ خطی، تشکیل رابطه های خطی و تابع	۲۰۹
نکات مهم فصل نهم	۲۱۷
فصل دهم(احصائیه)	**۲۱۹**
جدول کثرت دیتای غیر متمادی، خواص اجرای جدول کثرت	۲۲۱
کثرت تجمعی	۲۲۵
کثرث نسبی، گراف میله‌ای، گراف خط منکسر	۲۲۷
اوسط دیتای غیر متمادی، اوسط دیتای متمادی با استفاده از جدول	۲۳۳
نکات مهم فصل دهم	۲۳۷
فصل یازدهم(احتمال)	**۲٤۱**
کثرت نسبی و احتمال	۲۴۳
چانس برابر و نابرابر در یک فضای نمونه	۲۴۵
حادثهٔ اتفاقی یک فضای نمونه، قواعد احتمال	۲۴۷
دیاگرام درختی، قاعدهٔ اول مسیر (حاصل ضرب)	۲۵۱
نکات مهم فصل یازدهم	۲۵۵

فصل اول

اعداد حقیقی



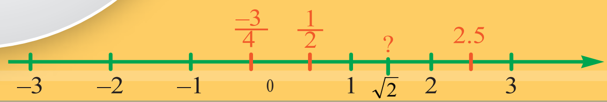


N
M
C
B
1
1
1
√2
A
D
O
−3
−2
−1
1
√2
2
3

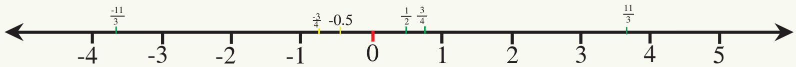
مفهوم اعداد حقیقی



می‌دانیم که تمام اعداد نسبتی را می‌توانید روی محور اعداد نمایش دهید، مانند: شکل زیر که روی محور اعداد بعضی از اعداد نسبتی نمایش داده شده اند.
آیا می‌توان عددی؛ مانند $\sqrt{2}$ را نیز روی محور اعداد نمایش داد؟



آیا اعداد ناطق را می‌شناسید؟
از صنف هفتم با در نظرداشت محور اعداد گفته می‌توانیم که هر عددناطق (نسبتی) را روی محور اعداد توسط یک نقطه نشان دهیم؛ مانند: شکل زیر که بعضی از اعداد نسبتی روی آن نشان داده شده اند:



اعداد دیگری نیز وجود دارند که تا حال روی محور اعداد نشان داده نشده اند.
یا به عبارهٔ دیگر اعداد نسبتی به تنهایی نمی توانند تمام نقاط روی محور اعداد را بپوشانند؛ یعنی بین اعداد نسبتی روی محور اعداد، جاهای خالی برای اعدادی که نسبتی یا ناطق نباشند وجود دارند که توسط همین اعداد پر می‌شوند.

فعالیت

• جذر مربع اعداد زیر را پیدا کنید:

عدد	$\frac{9}{4}$	4	100	2	16	25
جذر مربع			10			

• در فعالیت فوق پیدا کردن جذر مربع کدام عدد برای شما مشکل است؟

• آیا می‌توانید یک عدد ناطق را پیدا کنید که در خودش ضرب شود و حاصل ضرب آن عدد 2 باشد؟

• جدول مقابل را تکمیل کنید.

عدد	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
مربع عدد	1					2.25

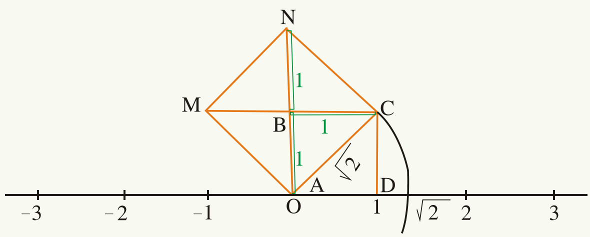
• جذر مربع عدد 2 بین کدام دو عدد قرار دارد؟

• به منظور دقت بیشتر در پیدا کردن جذر مربع عدد 2 جدول زیر را تکمیل نمایید.

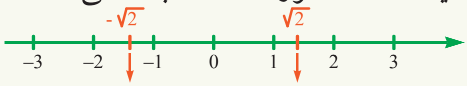
عدد	1.40	1.41	1.42	1.43
مربع عدد		1.9881		

با ملاحظه به جدول فوق، نشان دهید که جذر مربع عدد 2، بین کدام دو عدد قرار دارد. اعداد سطر اول اعدادی هستند که حدس موجودیت جذر مربع عدد 2 بین آن‌ها وجود دارد. به هر اندازه یی که در سطر اول جدول اعداد با هم نزدیک‌تر انتخاب گردند. باز هم دیده می‌شود که در سطر دوم جدول عدد 2 ظاهر نمی‌شود؛ یعنی عدد ناطقی را که مساوی $\sqrt{2}$ باشد پیدا کرده نمی‌توانیم، پس ست جدید اعداد را دریافت کردیم که عبارت از ست اعداد غیر ناطق (گنگ) است. ست اعداد غیر ناطق را به Q' نشان می‌دهیم، مانند: $\sqrt{7}, \sqrt{5}$, $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$

با وجود این که $\sqrt{2}$ عدد ناطق نمی باشد، می‌توان آن را بالای محور اعداد با استفاده از نمایش هندسی زیر مشخص نمود:



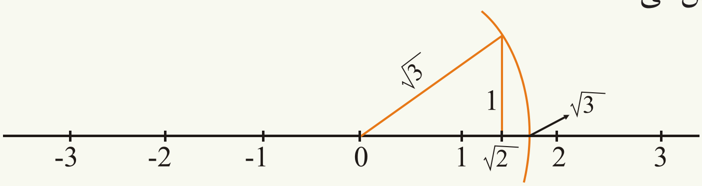
در شکل می‌بینیم مربع کوچکی ABCD که طول اضلاع آن یک واحد است به دو مثلث قایم‌الزاویه تقسیم شده و دارای مساحت یک واحد مربع می‌باشد.
و مربع بزرگتری AMNC که در شکل آن را مشاهده می کنید نظر به مربع کوچک ABCD دارای مساحت بیشتر است که مساحت آن 2 واحد مربع است، بنابر این از دریافت فورمول مساحت مربع می‌دانیم که هر ضلع مربع بزرگ مساوی به $\sqrt{2}$ واحد می‌باشد.
هرگاه نقطهٔ 0 را مرکز قرار داده به شعاع $\sqrt{2}$ که یک ضلع مربع بزرگ می‌باشد یک قوس را طوری رسم نماییم که محور اعداد را در یک نقطه قطع کند، نقطهٔ تقاطع با محور اعداد، موقعیت $\sqrt{2}$ را مشخص می کند.
همان‌طوری که اعداد ناطق دارای معکوس جمعی می‌باشند، اعداد غیر ناطق نیز معکوس جمعی دارند؛ طور مثال: معکوس جمعی $\sqrt{2}$، $(-\sqrt{2})$ است که به طرف سمت چپ صفر روی محور اعداد نشان داده شده است. هر نقطهٔ خط اعداد به یک عدد حقیقی و برعکس هر عدد حقیقی به یک نقطه محور اعداد مطابقت می کند.



تعریف

اتحاد ست‌های اعداد ناطق و غیر ناطق را به نام ست اعداد حقیقی یاد می کنند و ست اعداد حقیقی را به IR نشان می‌دهند. $IR = Q \cup Q'$

مثال: $\sqrt{3}$ را روی محور اعداد نشان دهید.
حل: از نقطه $\sqrt{2}$ به اندازهٔ یک واحد به سمت بالا حرکت می‌نماییم نقطهٔ به دست آمده را به 0 وصل می‌نماییم. نقطه 0 را مرکز گرفته یک قوس رسم می کنیم که محور اعداد را در یک نقطه قطع کند نقطهٔ به دست آمده موقعیت $\sqrt{3}$ را بالای محور اعداد مشخص می کند.



تمرین

1- کدام یک از اعداد زیر غیر ناطق اند:

a) $\sqrt{16}$,   b) $-\sqrt{5}$,   c) $\frac{2}{3}$,   d) $\sqrt{37}$

2- سه عدد ناطق و سه عدد غیر ناطق را بنویسید.

3- در باره $\sqrt{15}$ چی فکر می‌کنید، عدد ناطق است یا غیر ناطق؟

4- موقعیت $\sqrt{5}$ و $1+\sqrt{2}$ را روی محور اعداد مشخص کنید.

5- کدام یک از اعداد $8+2\sqrt{2}$, $3+\sqrt{4}$ ناطق و کدام آن‌ها غیر ناطق است؟

6- در مورد اعداد $\sqrt{5},\sqrt{31},\sqrt{36}$ و $\sqrt{144}$ چه فکر می‌کنید؟ ناطق اند و یا غیر ناطق؟

خواص اعداد حقیقی

آیا خاصیت تبدیلی، اتحادی و توزیعی در اعداد حقیقی وجود دارد؟

$$\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}\times\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{2}\times\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2}\times\sqrt{5}\right)$$

$$\sqrt{2}+\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}$$

?

فعالیت

• قیمت‌های تقریبی افاده‌های جذری زیر را با استفاده از جدول دریافت کنید:

عدد	قیمت تقریبی
$\sqrt{2}$	1.41
$\sqrt{3}$	1.73
$\sqrt{5}$	2.23

$\sqrt{3}+\sqrt{2}=?$ $\quad$ $\sqrt{2}+\sqrt{3}=?$

$2+\sqrt{2}=?$ $\quad$ $\sqrt{2}+2=?$

$\sqrt{1}+\sqrt{3}=?$ $\quad$ $\sqrt{3}+\sqrt{1}=?$

$1+\sqrt{3}=?$ $\quad$ $\sqrt{3}+1=?$

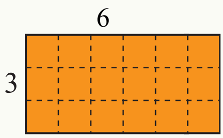
• آیا خاصیت تبدیلی عملیهٔ جمع، در ست اعداد حقیقی صدق می کند یا خیر؟

از فعالیت فوق نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد حقیقی a و b داریم:

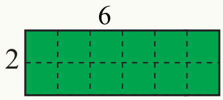
$$a+b=b+a$$

سؤال: آیا خاصیت تبدیلی عملیهٔ ضرب در اعداد حقیقی نیز صدق می کند؟ با چند مثال واضح سازید.

فعالیت

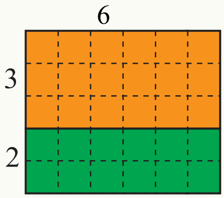


• یک مستطیل به طول 6 واحد و عرض 3 واحد رسم نمایید.
مساحت این مستطیل چند است؟



• مستطیل دیگر را رسم نموده که طول آن 6 واحد و عرض آن 2 واحد باشد مساحت این مستطیل چقدر است؟

• این دو مستطیل را کنار هم قرارداده و بگویید مساحت مستطیل بزرگ به دست آمده مساوی به چند است؟



• مساحت مستطیل بزرگ چه رابطه با مجموع مساحت‌های دو مستطیل کوچک دارد؟

$6(3+2)=(6\cdot3)+(6\cdot2)$

از فعالیت فوق نتیجه می‌شود که برای هر عددحقیقی a,b وc داریم:

$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$

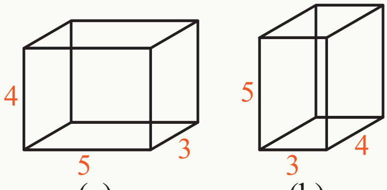
این خاصیت به نام خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع یاد می گردد.

مثال: طرف راست افادهٔ $\sqrt{3}\times(\sqrt{2}+\sqrt{5})$ را با در نظر داشت خاصیت اعداد حقیقی بنویسید.

حل: $\sqrt{3}\times(\sqrt{2}+\sqrt{5})=(\sqrt{3}\times\sqrt{2})+(\sqrt{3}\times\sqrt{5})$

فعالیت

اشکال مقابل را در نظر بگیرید.



- حجم مکعب مستطیل شکل a مساوی به چند است؟
- حجم مکعب مستطیل شکل b مساوی به چند است؟

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم:

برای هر عدد حقیقی a،b و c داریم که: $(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$

این خاصیت اتحادی تحت عملیهٔ ضرب است.

مثال: با استفاده از خاصیت اعداد حقیقی افادهٔ $\sqrt{2}\times(\sqrt{3}\times\sqrt{5})$ را در نظرگرفته طرف راست آن را بنویسید.

حل:

$$\sqrt{2}\times(\sqrt{3}\times\sqrt{5}) = (\sqrt{2}\times\sqrt{3})\times\sqrt{5}$$

آیا در اعداد حقیقی خاصیت اتحادی تحت عملیهٔ جمع وجود دارد؟ با چند مثال واضح سازید.

یادداشت:

1- شما به یاد دارید که:

$$a+0=0+a=a$$
$$a\times 1=1\times a=a$$

روابط فوق برای هر a از ست اعداد حقیقی هم صدق می کند.

2 - از این به بعد علامت $(\times)$ را به علامت $(\cdot)$ می‌توانید نشان دهید.

تمرین

مساوات‌های زیر را در نظر گرفته خاصیت‌های مربوط را در مقابل آن‌ها بنویسید.

$a-\quad \sqrt{5}(2+3)=2\sqrt{5}+3\sqrt{5}$ از کدام خاصیت پیروی می‌کند؟

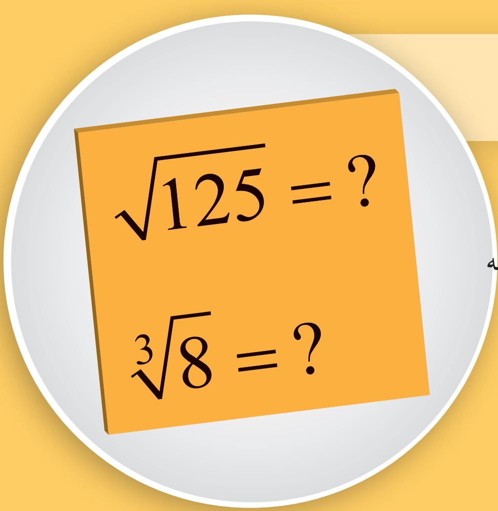
$b-\quad \sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ از کدام خاصیت پیروی می‌کند؟

$c-\sqrt{3}\times(\sqrt{2}\times\sqrt{3})=(\sqrt{3}\times\sqrt{2})\times\sqrt{3}$ از کدام خاصیت پیروی می‌کند؟

$d-\quad \sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{3}\times\sqrt{2}$ از کدام خاصیت پیروی می‌کند؟

$e-\quad \sqrt{3}+(\sqrt{5}+\sqrt{2})=(\sqrt{3}+\sqrt{5})+\sqrt{2}$ از کدام خاصیت پیروی می‌کند؟

طریقهٔ عمومی استخراج جذر مربع تقریبی



دریافت جذرمربع اعداد را به طریقهٔ تجزیه می‌دانید.

- آیا می‌توان جذر مربع تمام اعداد را به طریقهٔ تجزیه دریافت کرد؟
- آیا جذر سوم یک عدد را به جز از طریقهٔ تجزیه به کدام طریقهٔ دیگر دریافت کرده می‌توانید؟

a) 21　　　b) 12　　　c) 7

– دریافت جذر مربع (جذر دوم) اعداد را به طریقهٔ تجزیه می‌دانید، مثال: $\sqrt{25}$ چند است.

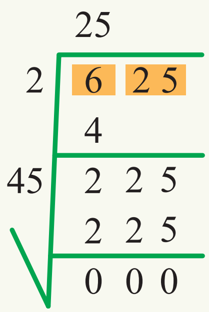
– جذر مکعب (جذر سوم)، اعداد را دریافت کرده می‌توانید، مثال: $\sqrt[3]{27}$ چند است؟

– آیا برای پیدا کردن جذر مربع اعداد به جز از طریقهٔ تجزیه کدام طریقهٔ دیگر وجود دارد؟

دریافت جذر مربع اعداد را به شکل عمومی برای هر عدد مثبت در صنف هفتم خواندید به منظور یاد آوری مثال‌های زیر را در نظر می گیریم:

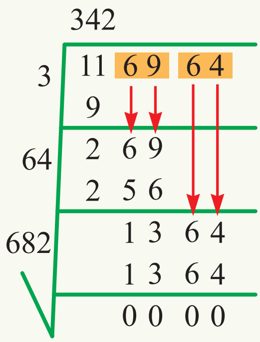
مثال 1: جذر مربع عدد 625 را دریافت می کنیم.

حل: عدد 625 را تحت علامت جذر می‌نویسیم.



مثال 2: جذر مربع عدد 116964 را دریافت می کنیم.

حل:



در نتیجه: $\sqrt{116964} = 342$

سؤال:

1 - مراحل دریافت جذر مربع یک عدد را توضیح دهید.

2 - جذر مربع اعداد زیر را دریافت کنید.

a) 1024 b) 5329 c) 1127

بعد از حل در جز c دیده می‌شود که 1127 جذر مربع مکمل ندارد .
آیا جذر مربع تقریبی اعداد را به شکل عمومی محاسبه کرده می توانید؟
برای محاسبهٔ جذر مربع تقریبی یک عدد از روش عمومی کار گرفته برای این که بتوانیم جذر مربع تقریبی را به دست آوریم فعالیت زیر را انجام دهید:

فعالیت

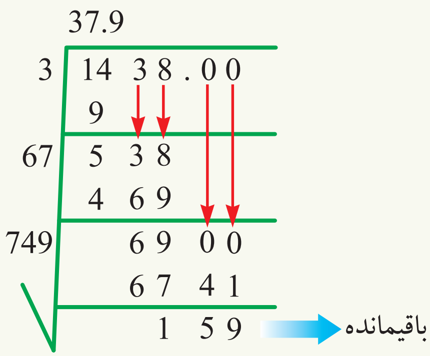
عدد	1.2	2.03	0.3	1.23	1.360
مربع عدد	1.44	5.1209			

• با در نظرداشت جدول فوق چه رابطه بین تعداد ارقام اعشاری عدد و تعداد ارقام

اعشاری مربع آن وجود دارد؟

• با داشتن تعداد ارقام اعشاری جذر مربع یک عدد، چگونه می‌توانیم تعداد ارقام اعشاری آن عدد را مشخص کنیم؟

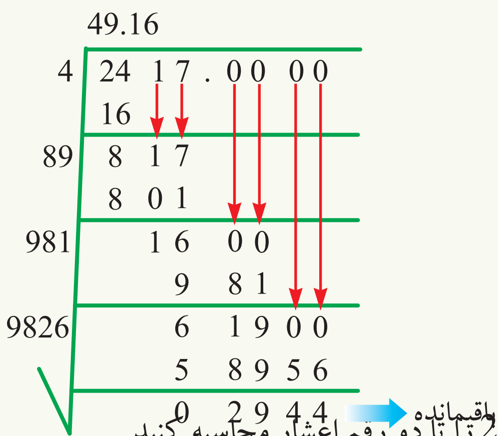
همان طوری که در فعالیت بالا تعداد ارقام اعشاری جذر مربع، نصف تعداد رقم‌های اعشاری مربع آن است از این قاعده برای استخراج جذر مربع تقریبی استفاده می کنیم.



مثال 1: می‌خواهیم جذر مربع عدد 1438 را تا یک رقم اعشار محاسبه کنیم.

در نتیجه: $\sqrt{1438} \approx 37.9$

سؤال : آیا 1438=1438.00 است؟ چرا 1438 را به شکل 1438.00 می‌نویسیم.



مثال 2: جذر مربع تقریبی عدد 2417 را تا دو رقم اعشار محاسبه کنید. $\sqrt{2417} \approx 49.16$

در نتیجه
در مثال‌های فوق می‌بینیم که تعداد ارقام اعشاری باقیمانده مساوی به تعداد ارقام اصلی عددی است که می‌خواهیم جذر مربع آن را پیدا کنیم.

تمرین

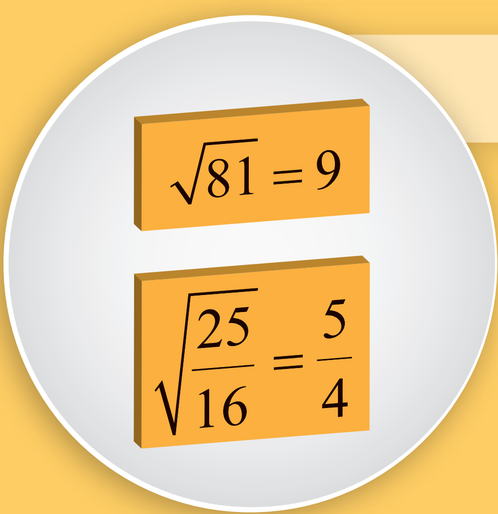
1- جذر مربع اعداد زیر را تا یک رقم اعشار محاسبه کنید:

a) 814 b) 74 c) 427

2- جذر مربع اعداد زیر را تا دو رقم اعشاری محاسبه کنید:

a) 94752 b) 5039 c) 418

قیمت تقریبی جذر مربع به طریقهٔ اوسط



- آیا گفته می‌توانید که $\sqrt{81}$ چند است؟
- آیا گفته می‌توانید که $\sqrt{\frac{25}{16}}$ چند است؟

شما می‌دانید هر عددی که در نفس خود ضرب شود حاصل ضرب به دست آمده به نام مربع عدد اولی یاد می‌شود، ولی جذر مربع تمام اعداد مثبت را مانند: $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{30}$ به شکل کسری یا نسبتی ارائه کرده نمی‌توانیم.

از این رو قیمت جذر مربع بعضی از اعداد به شکل تقریبی ارائه می‌شود.

دراین‌جا می‌خواهیم قیمت تقریبی $\sqrt{5}$ را دریافت کنیم.

سؤال: عدد 5 بین مربعات کدام دو عدد قرار دارد؟

$\sqrt{5}$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟

با درنظرداشت این که جذر مربع 5 بین 2 و 3 قرار دارد می‌توان گفت که جذرمربع عدد 5 به گونهٔ تقریبی مساوی به قیمت وسطی 2 و 3 است، یعنی: $\frac{2+3}{2}=2.5$

برای پیدا کردن قیمت دقیق‌تر $\sqrt{5}$ جدول زیر را در نظر می‌گیریم:

عدد	مربع
2	4
2.5	6.25
3	9

عدد 5 بین مربع 2 و 2.5

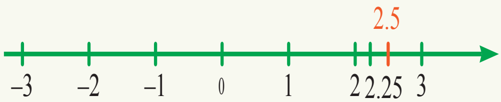
به عبارهٔ دیگر $\sqrt{5}$ بین 2 و 2.25 قرار دارد

با در نظر داشت این که عدد 5 بین 4 و 6.25 قرار دارد می‌توان گفت که قیمت تقریبی $\sqrt{5}$ قیمت وسطی 2 و 2.5 است. $\frac{2+2.5}{2}=\frac{4.5}{2}=2.25$

جدول مقابل را تکمیل کنید.

عدد	مربع
2	4
2.25	
2.5	6.25

بادر نظرداشت جدول فوق گفته می توانید $\sqrt{5}$ بین کدام دو عدد قرار دارد؟
دیده می‌شود که قیمت تقریبی $\sqrt{5}$ با در نظرداشت این دو مرحله عبارت از 2.25 بوده پس نوشته کرده می‌توانیم که: $\sqrt{5} \approx 2.25$
هر قدر که به روش فوق عملیه‌های بالا را تکرار نماییم به $\sqrt{5}$ بیشتر نزدیک می‌شویم.



در نتیجه می توانیم جذر تقریبی اعداد را با استفاده از روش فوق دریافت نماییم.

مثال: جذر مربع تقریبی $\sqrt{10}$ را دریافت کنید.

حل: با استفاده از روش فوق، قیمت تقریبی اولی $\sqrt{10}$ می‌تواند قیمت وسطی اعداد 3 و 4 باشد.

$$\frac{3+4}{2} = 3.5 \quad , \quad 3 < \sqrt{10} < 4 \quad , \quad 9 < 10 < 16$$

خلاصه، عملیهٔ فوق را در جدول زیر ملاحظه می کنید.

عدد	مربع
3	9
3.5	12.25
4	16

$\sqrt{10}$ بین 3 و 3.5

از جدول فوق، نتیجه می گیریم که: $\sqrt{10} \approx 3.5$

با در نظرداشت اینکه عدد 10 بین 9 و 12.25 قرار دارد می‌توان گفت که قیمت تقریبی $\sqrt{10}$، قیمت وسطی 3 و 3.5 است.

$$\frac{3+3.5}{2} = \frac{6.5}{2} = 3.25$$

برای دریافت قیمت دقیق تر $\sqrt{10}$ جدول زیر را در نظر می گیریم.

عدد	مربع
3	9
3.25	10.5625
3.5	12.25

$\sqrt{10}$ بین 3 و 3.25

درنتیجه: $\sqrt{10} \approx 3.25$

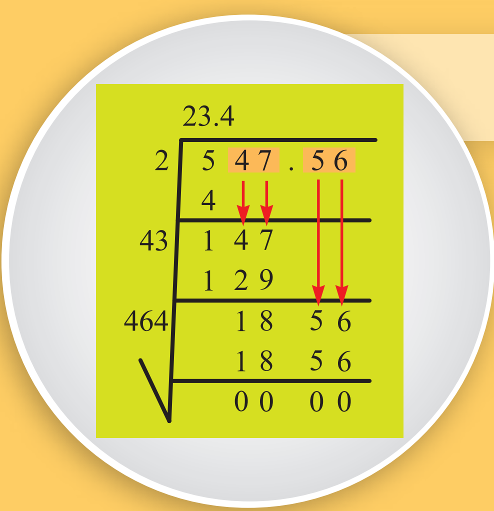
تمرین

1- صحت هر یک از غیر تساوی‌های زیر را نشان دهید:

a) $3 < \sqrt{12} < 4$ b) $7.1 < \sqrt{15} < 7.2$

2- با استفاده از روش قیمت وسطی جذر مربع تقریبی اعداد زیر را محاسبه کنید.

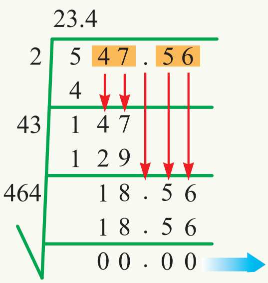
جذر مربع اعداد اعشاریه‌دار



اگر یک عدد اعشاریه‌دار را مربع کنیم، تعداد رقم‌های بعد از اعشاری آن جفت است.
برای دریافت جذر مربع اعداد اعشاریه دار که تعداد رقم‌های بعد از اعشاری آن طاق باشد، چه باید انجام دهیم؟

مثال: جذر مربع عدد 547.56 را محاسبه کنید.

حل: برای دریافت جذر مربع عدد 547.56 قسمت صحیح آن را از راست به چپ و قسمت اعشاری آن را برعکس از چپ به راست دو دو خانه جدا نموده و سپس با استفاده از طریقهٔ عمومی دریافت جذر مربع، جذر عدد را استخراج می‌نماییم.



در نتیجه: $\sqrt{547.56} = 23.4$

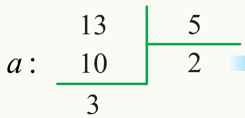
سؤال: چرا در عدد 547.56 تنهایک رقم اعشار داریم؟

- عدد 381.291 چند رقم اعشاری دارد؟
- برای پیدا کردن جذر مربع این عدد در قدم اول چه باید کرد؟
- جذر مربع آن را دریافت کنید.
- قبل از جذر گرفتن حدس زده می‌توانید جذر مربع این عدد چند رقم اعشاری دارد؟
- باقیماندهٔ جذر گرفته شده، چند رقم اعشاری باید داشته باشد؟

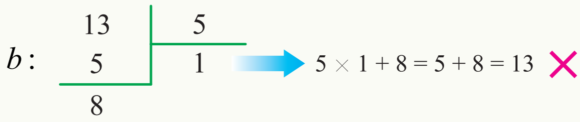
در گذشته ما در عملیات چهارگانه به خاطر صحت حل درست سوال، جواب را امتحان می‌کردیم بنا براین در جذر اعداد اعشاریه‌دار نیز این عمل را انجام می‌دهیم.

فعالیت

عملیه‌های تقسیم زیر را در نظر بگیرید.



$5 \times 2 + 3 = 10 + 3 = 13$ ✓

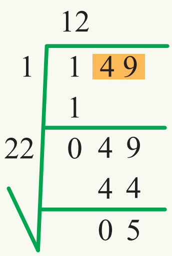


با در نظر داشت عملیات جزء a و b شرایط درست بودن عمل تقسیم را شرح دهید.

سؤال: چطور می‌توان اطمینان حاصل کرد که عملیهٔ جذر گرفتن درست است؟

مثال: جذر مربع عدد 149 را دریافت و درست بودن آن را امتحان می‌کنیم.

حل:



امتحان: $(12 \times 12) + 5 = 144 + 5 = 149$

سؤال: چرا 12 را ضرب 12 می‌کنیم.؟

آیا برای امتحان درست بودن جذر فقط اجرای این عملیه کافی است؟

اگر شاگرد به طور اشتباه عوض جذر 149 (12) عدد 11 ضرب 11 و باقیمانده؛ یعنی 28 را جمع آن کند مساوی به عدد اصلی می‌شود. $(11 \times 11) + 28 = 149$

آیا می‌توانیم جواب آن را درست قبول کنیم؟

از مثال فوق نتیجه می‌گیریم که برای امتحان کردن عملیه جذر مربع شرط دیگری هم لازم است دو چند جذر مربع عدد 149 (2×12) جمع (1) بزرگ‌تر از باقیمانده؛ یعنی 5 می‌باشد. $5 < 2 \times 12 + 1$

سؤال: با در نظر داشت فعالیت فوق نشان دهید که چرا جواب 11 اشتباه بود؟

برای امتحان کردن جذر مربع شرایط زیر باید در نظر گرفته شود:

1- حاصل ضرب جذر مربع در خودش جمع باقیمانده باید مساوی به عدد اصلی باشد.

2- دو چند جذر مربع یک عدد، جمع یک (1) باید بزرگ‌تر از باقیمانده باشد.

تمرین

جذر مربع اعداد زیر را دریافت نموده و امتحان کنید:

1) $780.81 = ?$ 2) $6721 = ?$ 3) $973 = ?$ 4) $692.916 = ?$

جمع و تفریق اعداد جذردار

$$2\sqrt{3}+4\sqrt{2}-\sqrt{3}=?$$

$$x\sqrt[n]{a}+y\sqrt[n]{a}=?$$

شما می‌دانید که در ست اعداد نسـبتی برای هـر a می‌توانیم بنویسیم:

$$3a+2a=(3+2)a=5a$$
$$3a-2a=(3-2)a=a$$

آیا اعداد جذردار را با هم جمع و تفریق کرده می‌توانید؟

تساوی‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=(2+4)\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$
$$2\times\sqrt{13}+3\times\sqrt{13}=(2+3)\times\sqrt{13}=5\times\sqrt{13}$$

برای آسانی $5\times\sqrt{13}$ را به شکل $5\sqrt{13}$ می‌نویسیم.
برای دریافت حاصل جمع از خاصیت‌های اعداد حقیقی استفاده می کنیم.
سؤال: آیا برای تفریق اعداد حقیقی از روش جمع استفاده کرده می توانیم؟

فعالیت

در مساوات دوم بجای 5، (7-2) را قرار دهید. مشابه به روش فوق محاسبه را انجام دهید.

جمع و تفریق اعداد جذری در صورتی امکان دارد. که درجهٔ جذر و عدد تحت جذر یکسان باشند. ضرایب حدود متشابه جذور را با هم جمع یا از هم تفریق می کنیم.
به صورت عموم:

$$x\sqrt[n]{a}\pm y\sqrt[n]{a}=(x\pm y)\sqrt[n]{a}$$

سؤال: گفته می‌توانید که جذرهای مشابه کدام‌ها اند؟ آیا $\sqrt{10}$ و $\sqrt{5}$ با هم مشابه اند؟

مثال 1: $2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=?$

حل: چون اعداد تحت جذر و درجهٔ جذور با هم مساوی اند.

بنابراین:

$$2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=(2+5)\sqrt{3}=7\sqrt{3}$$

مثال 2: $18\sqrt{12}-16\sqrt{12}=?$

حل: $18\sqrt{12}-16\sqrt{12}=(18-16)\sqrt{12}=2\sqrt{12}$

مثال 3: $8\sqrt{48}-10\sqrt{48}-3\sqrt{48}=?$

حل:

$=(8-10)\sqrt{48}-3\sqrt{48}$

$=-2\sqrt{48}-3\sqrt{48}$

$=(-2-3)\sqrt{48}=-5\sqrt{48}$

در مرحلهٔ اول نتیجه دو حد را به دست آورده بعد نتیجه را با حد سوم جمع می کنیم.

فعالیت

- قیمت $\sqrt{16}+\sqrt{9}$ و $\sqrt{9+16}$ را به دست آورید، این قیمت‌ها را با هم مقایسه کنید؟
- قیمت‌های $\sqrt{100-36}$ و $\sqrt{100}-\sqrt{36}$ را به دست آورده این دو قیمت را با هم مقایسه کنید.

از فعالیت بالا نتیجه می‌شود، که:

$$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$
$$\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

تمرین

1- کدام اعداد جذری را می‌توان با هم جمع یا از هم تفریق نمود؟

a) $4\sqrt[3]{2}+3\sqrt{2}$ b) $5\sqrt{4}+3\sqrt{4}$

c) $\sqrt{5}\times\sqrt{36}+\sqrt{5}\times\sqrt{36}$ d) $\sqrt{27}+3\sqrt{3}$

2- حاصل جمع و حاصل تفریق اعداد جذر دار زیر را به دست آورید:

a) $5\sqrt{2}+3\sqrt{2}-9\sqrt{2}$ b) $\sqrt{50}-3\sqrt{50}$

c) $\sqrt{81}+\sqrt[3]{-27}$ d) $\sqrt{5}\times\sqrt{36}+\sqrt{5}\times\sqrt{36}$

ضرب و تقسیم اعداد جذری

$$\sqrt{\frac{36\times9}{16}}=\frac{\sqrt{36}\times\sqrt{9}}{\sqrt{16}}=\frac{6\times3}{4}=\frac{9}{2}$$

آیا اعداد جذردار را ضرب و تقسیم کرده می توانید؟

فعالیت

• جذر اعداد زیر را به دست آورید:

$\sqrt{36\times9}=\sqrt{\quad\quad}=$ ....

$\sqrt{36}\times\sqrt{9}=$ .... × .... =

$\sqrt{4\times25}=\sqrt{100}=$ ....

$\sqrt{4}\times\sqrt{25}=$ .... × .... =

$\sqrt{25\times36}=\sqrt{\quad\quad}=$ ....

$\sqrt{25}\times\sqrt{36}=$ .... × .... =

$\sqrt{4\times9}=\sqrt{\quad\quad}=$ ....

$\sqrt{4}\times\sqrt{9}=$ .... × .... =

از فعالیت بالا نتیجه می گیریم:

برای هر عدد حقیقی a و b بزرگتر از صفر داریم: $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$

مثال 1:

حل:

$\sqrt{2}\times\sqrt{32}=\sqrt{2\times32}=\sqrt{64}=8$

$\sqrt{20}\times\sqrt{5}=\sqrt{20\times5}=\sqrt{100}=10$

$\sqrt{0.5}\times\sqrt{0.5}=\sqrt{0.5\times0.5}=\sqrt{0.25}=0.5$

با انجام عملیه‌ها بالای جذور، سعی می کنیم که افادۀ ساده‌تری را به دست آوریم. این عمل را ساده کردن جذرها می‌نامند.

مثال 2:

$$\sqrt{75}=?$$

حل:

$$\sqrt{75}=\sqrt{25\times3}=\sqrt{25}\times\sqrt{3}=5\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$$

مثال 3: این افاده را ساده کنید:

$$\sqrt{64a^2}=?$$

حل:

$$\sqrt{64a^2}=\sqrt{64}\times\sqrt{a^2}$$

$$\sqrt{8^2}\times\sqrt{a^2}=8a$$

مثال 4: می‌خواهیم افاده‌های جذری زیر را با هم ضرب نماییم:

حل:

$$(2\sqrt{6})(5-\sqrt{3})$$

$$=(2\sqrt{6}\times5)-(2\sqrt{6}\times\sqrt{3})$$

$$=10\sqrt{6}-2\sqrt{18}=10\sqrt{6}-2\sqrt{9\times2}$$

$$=10\sqrt{6}-2\sqrt{9}\times\sqrt{2}=10\sqrt{6}-6\sqrt{2}$$

آیا می‌توانید مشابه به قاعدهٔ ضرب جذرها، برای تقسیم نیز قاعدهٔ را دریافت کنید؟

مثال زیر را در نظر بگیرید:

$$\sqrt{\frac{16}{100}}=\sqrt{16\times0.01}=\sqrt{16}\times\sqrt{0.01}=4\times0.1=0.4=\frac{4}{10}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}}$$

اگر به جای 16، a و به جای 100، b بنویسیم، پس داریم که: $b\neq0$، $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

مثال 5:

$$\sqrt{\frac{36}{49}}=?$$

حل:

$$\sqrt{\frac{36}{49}}=\sqrt{\frac{9\times4}{49}}=\frac{\sqrt{9}\times\sqrt{4}}{\sqrt{49}}=\frac{3\times2}{7}=\frac{6}{7}$$

تمرین

1- افاده‌های زیر را ساده کنید:

$a)\sqrt{144a^2}$ $b)\sqrt{169a^2}$ $c)\sqrt{0.09}$ $d)\sqrt{6}\times\sqrt{27}$

2- افاده‌های زیر را ساده کنید:

a) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}=?$ b) $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{5}}=?$ c) $\sqrt{\frac{81a^4}{c^2}}=?$

قوانین اعداد توان‌دار
ضرب اعداد توان‌دار:



در لابراتوارها از میکروسکوپ‌ها برای بزرگ شدن اجسام استفاده می کنند هر مایکروسکوپ دو عدسیه دارد که یک عدسیهٔ آن نزدیک به چشم و دیگری نزدیک جسم قرار دارد. عدسیه نزدیک جسم، اندازه را 2^2 برابر و عدسیهٔ نزدیک چشم، تصویر را 2^3 برابر بزرگ می‌سازد. تصویر جسم چند برابر بزرگ می‌شود؟

در صنف گذشته توان و قوانین مربوطهٔ آن را برای اعداد طبیعی مورد مطالعه قرار دادیم در این بخش می‌خواهیم برای اعداد حقیقی آن را مورد مطالعه قرار دهیم.

فعالیت

• جاهای خالی را با اعداد مناسب طاقت‌دار پر نمایید.

$$5^6 = 5^2 \times 5^4 = 5^3 \times .... = 5^4 \times .... = ... \times 5^1$$

$$.... = (\frac{2}{5})^2 \times (\frac{2}{5})^8 = (\frac{2}{5})^3 \times .... = (\frac{2}{5})^9 \times ....$$

$$a^5 = a^4 \times .... = ... \times a^2 = ... \times a^3$$

از فعالیت بالا، نتیجه می گیریم: که هر گاه m و n اعداد تام و a یک عدد حقیقی باشد.

داریم که: $a^m \times a^n = a^{m+n}$

اگر در ضرب اعداد توان دار قاعده ها مساوی و توان‌ها مختلف باشند. در این‌صورت از قاعده‌های مساوی یکی را انتخاب نموده و توان‌ها را باهم جمع می‌نماییم.

مثال: $2^3 \times 2^4 = ?$

حل: $2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

سوال:

با یک مثال عددی واضح سازید که $(-a)^n = -a^n$ همیشه درست نیست.

فعالیت

تساوی زیر را در نظر بگیرید:

$$(14^9)^4=(14^9)\times(14^9)\times(14^9)\times(14^9)=(14)^{9+9+9+9}=14^{4\times9}$$

جاهای خالی را با اعداد مناسب طاقت‌دار پر نمایید.

$$(2^3)^4=2^3\times....\times....\times....=2^{3+....+3+3}=2^{3\times....}$$

$$(a^n)^4=a^n\times....\times....\times....=a^{n+....+....+....}=a^{......\times4}$$

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم برای یک عدد حقیقی a و دو عدد تام n و m داریم:

$$(a^n)^m=a^{m\cdot n}$$

اگر یک افاده توان دار به یک نمای دیگر رفع شود در این حالت نما ها را با هم ضرب می‌نماییم. که به نام قانون نما در نما یاد می‌شود.

مثال: $(2^{-2})^3=(2^{-2})(2^{-2})(2^{-2})=(2)^{-2-2-2}=2^{-2\times3}=(2)^{-6}$

تساوی‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$3^2\times4^2=(3\times3)(4\times4)=(3\times4)(3\times4)=(3\times4)^2=(12)^2$$

$$6^3\times5^3=(6\times6\times6)(5\times5\times5)=(6\times5)(6\times5)(6\times5)=(6\times5)^3=(30)^3$$

مساوات فوق به صورت عموم برای تمام اعداد حقیقی a, b و n یک عدد تام بر قرار است. $(a\times b)^n=a^n\times b^n$

اگر در ضرب اعداد توان‌دار قاعده‌ها مختلف و توان‌ها مساوی باشند، پس قاعده ها را با هم ضرب و از توان‌های مساوی یکی را می‌نویسیم.

مثال: $4^3\times5^3=?$

حل: $4^3\times5^3=(4\times5)^3=20^3$

تمرین

با استفاده از قانون ضرب سؤال‌های زیر را به شکل یک توان بنویسید.

1) $6^2\times6^3=?$ 2) $(0.2)^2\times(0.2)^2=?$ 3) $(\frac{1}{2})^4\times(\frac{1}{2})^3=?$ 4) $(\frac{1}{4})^{-7}\times(\frac{1}{4})^{-5}=?$

5) $5^4\times5=?$ 6) $27\times5^3=?$ 7) $(4^{-2})^7=?$ 8) $a^5\times b^5\times c^5=?$

9) $2^3\times5^3=?$ 10) $81\times a^2=?$ 11) $2^{-1}\times3^{-1}=?$ 12) $(10^2)^3=?$

تقسیم اعداد توان‌دار



آیا تا به حال عکس خود را به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ کوچک کرده‌اید؟ برای این کار از کدام عمل ریاضی استفاده می کنیم؟

برای ضرب اعداد توان‌دار توانستیم رابطهٔ بین توان و قاعده را دریافت کنیم آیا می توانید به صورت مشابه در رابطهٔ تقسیم دو عدد توان‌دار رابطهٔ را دریافت کنید؟

فعالیت

$$3^5 \div 3^4 = \frac{3^5}{3^4} = \frac{3^{\square} \times 3^4}{3^4} = 3^1 = 3^{5-\square}$$

- خانه‌های خالی را پر نمایید.
- چه رابطه بین توان مقسوم، توان مقسوم علیه و توان خارج قسمت وجود دارد؟
- آیا این رابطه برای تقسیم همه اعداد توان دار باقاعده مساوی صدق می‌نماید؟

به صورت عموم هرگاه a یک عدد حقیقی خلاف صفر، n و m اعداد تام باشند در این صورت داریم:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

در تقسیم دو عدد توان‌دار که قاعده‌های آن‌ها باهم مساوی باشند از قاعده‌های مساوی یکی را گرفته و از توان مقسوم توان مقسوم علیه را تفریق توان‌ها می کنیم حاصل تفریق توان‌ها عبارت از توان قاعدهٔ مطلوب است.

مثال: عملیه‌های تقسیم زیر را انجام دهید:

$a)\ 5^3 \div 5^3 \qquad b)\ 5^{-7} \div 5^{-1}$

حل:

$a)\ \frac{5^3}{5^3} = 5^{3-3} = 5^0$

$b)\ 5^{-7} \div 5^{-1} = 5^{-7-(-1)} = 5^{-7+1} = 5^{-6}$

فعالیت

• جاهای خالی را با اعداد مناسب پر نمایید.

$$12^3 \div 4^3 = \frac{12^3}{4^3} = \frac{\square \times 12}{4 \times \square \times 4} = (\frac{\square}{4}) \times (\frac{12}{\square}) \times (\frac{12}{4}) = (\frac{12}{4})^3 = 3^3$$

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم که: به صورت عموم برای هر اعداد حقیقی a و b که $b \neq 0$ و n عددتام باشند داریم:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

در تقسیم اعداد توان‌دار اگر قاعده‌ها مختلف و توان‌ها مساوی باشند، قاعده مقسوم را بر قاعده مقسوم علیه تقسیم و از توان‌ها مساوی یکی را به حیث توان حاصل تقسیم می‌نویسیم.

مثال: $b)\ 3^2 \div 10^2 = ?$ $a)\ 25^4 \div 5^4 = ?$

حل: نظر به قانون تقسیم طاقت می‌توان نوشت:

$a)\ 25^4 \div 5^4 = (25 \div 5)^4 = ?$

$b)\ 3^2 \div 10^2 = (3 \div 10)^2 = (0.3)^3$

اگر در تقسیم دو عدد توان‌دار قاعده ها و توان‌ها در مقسوم و مقسوم علیه با هم فرق داشته باشند برای پیدا کردن حاصل تقسیم هر کدام را جداگانه به توان رفع می‌سازیم بعد از آن تقسیم می کنیم.

یادداشت: قوانین فوق در صورتی که m و n اعداد حقیقی باشند نیز صحت دارد.

تمرین

1- با استفاده از قانون تقسیم سؤالات زیر را حل نمایید:

$1)\ (\frac{1}{2})^4 \div (\frac{1}{2})^3 = ?$ $2)\ 13^7 \div 13^8 = ?$ $3)\ \frac{12^6}{12^5} = ?$

$4)\ \frac{7^5}{7^3} = ?$ $5)\ \frac{8^5}{8^3} = ?$ $6)\ 6^3 \div 2^3 = ?$

2- با مثال واضح سازید که:

$a^m - a^n \neq a^{m-n}$

$(a-b)^n \neq a^n - b^n$

توان صفر و توان منفی

$$2^3 = ?$$
$$2^0 = ?$$
$$2^{-1} = ?$$

2^3 را محاسبه کنید.

آیا 2^0 را می‌توان محاسبه کرد؟

آیا اعـــداد را به توان صفر نوشـــته می‌توانیم؟

آیـــا اعـــداد را به توان عـــدد منفی نوشته کرده می‌توانیم؟

فعالیت

جدول زیر را تکمیل کنید.

عدد توان دار	$2^4 \div 2$	$2^3 \div 2$	$2^2 \div 2$	$2^1 \div 2$
حاصل	8			

• چه رابطهٔ بین توان‌های سطر اول جدول وجود دارد؟

• چه رابطهٔ بین اعداد سطر دوم جدول می‌یابید؟

• سطر اول را ادامه دهید و عدد توان‌دار بعدی را 2^0 قرار دهید. با توجه به رابطهٔ که بین اعدادی توان‌دار سطر دوم وجود دارد، چه عددی را برای 2^0 در سطر دوم دریافت کرده می‌توانید؟

• جدول بالا را برای عدد 3 تکرار کنید.

• جدول زیر را برای عدد $a \neq 0$ تکمیل کنید.

عدد توان دار	$a^4 \div a$	$a^3 \div a$	$a^2 \div a$	$a^1 \div a$
حاصل	a^3			

• سطر اول را ادامه داده عدد توان‌دار بعدی را a^0 قرار دهید. با توجه به رابطه‌یی که بین اعداد سطر دوم وجود دارد. چه عددی را برای a^0 در سطر دوم دریافت کرده می‌توانید؟

از فعالیت بالا نتیجه می گیریم که برای هر عدد حقیقی a خلاف صفر $(a \neq 0)$ داریم:

$$a^0 = 1$$

فعالیت

• جدول زیر را در نظر بگیرید:

اعداد توان دار	3^3	3^2	3^1	3^0	3^{-1}
حاصل	27	9	3	1	

• چه رابطه را بین اعداد سطر اول و سطر دوم جدول می‌یابید؟
• سطر اول را ادامه داده عدد توان دار بعدی را 3^{-2} قرار دهید.
• اکنون با در نظرداشت رابطه‌یی که بین اعداد سطر دومی پیدا کرده اید، چه اعدادی را برای 3^{-1} و 3^{-2} دریافت می کنید؟
• برای عدد $a \neq 0$ جدول بالا را برای توان‌های a بنویسید. چه اعدادی را برای 3^{-2} و a^{-2} پیدا کرده می‌توانید؟

از فعالیت فوق، نتیجه می گیریم که برای هر عدد حقیقی a خلاف صفر و n یک عدد تام داریم که:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

مثال : افاده‌های $(1.3)^{-3}$ و $(-15)^{-21}$ را به شکل توان مثبت بنویسید:

حل: $(-15)^{-21} = \frac{1}{(-15)^{21}}$, $(1.3)^{-3} = \frac{1}{(1.3)^3}$

تمرین

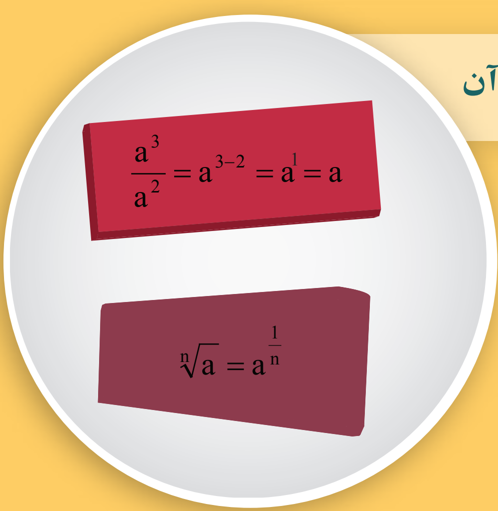
1- افاده‌های زیر را به توان مثبت بنویسید:

a) 5^{-2} b) $(\sqrt{7})^{-5}$ c) $(\frac{1}{3})^{-3}$ d) $(2\pi)^{-3}$

2- هر یک از افاده‌های زیر را به صورت یک افاده با توان منفی بنویسید:

a) 0.0001 b) $\frac{1}{b^2}$ c) $\frac{1}{6^4}$ d) $\frac{1}{3^{11}}$

توان‌های کسری و قوانین آن



شما قوانین توان‌های تام را پیش از این خواندید، آیا می‌توانید قوانین فوق را بالای توان‌های کسری نیز تطبیق کنید؟

فعالیت

- آیا $\sqrt{16}$ و $\sqrt{-16}$ با هم مساوی اند؟
- $\sqrt[3]{-8}$ و $\sqrt[3]{8}$ مساوی به چند است؟
- آیا $\sqrt{a}$ را به شکل توان می‌توان نوشت؟ $\sqrt[n]{a}$ را به شکل توان بنویسید.

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

اعداد منفی در ست اعداد حقیقی جذرمربع ندارند. هر عدد چه مثبت، چه منفی باشد، جذر مکعب دارد.

به طور عموم یک عدد جذر دار را به شکل $\sqrt[n]{a}$ می‌نویسند.

و این قسم خوانده می‌شود (جذر n ام a).

مقصد از جذر n ام یک عدد عبارت از عددی است که هر گاه آن عدد (عدد تحت جذر) به توان n بلند برده شود، عدد تحت جذر حاصل می‌شود.

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$$

توان عدد تحت جذر (1) — درجه جذر (n)

به یاد داشته باشید: اگر توان یک عدد تحت جذر و درجهٔ جذر با هم مساوی باشند؛

پس:

$$\sqrt[n]{a^n}=a^{\frac{n}{n}}=a^1=a$$

فعالیت

• جاهای خالی را پر کنید.

$a^{\frac{1}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}=(1+\quad)a^{\frac{1}{3}}=3\sqrt[3]{a} \quad ,3a^{\frac{1}{5}}-a^{\frac{1}{5}}=(\quad -1)a^{\frac{1}{\Diamond}}=2\cdot\sqrt{a}$

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم:

I: هرگاه قاعده‌ها مشابه و توان‌های کسری مساوی باشند برای هر $a\in IR$ طوری که $a\neq 0$ باشد، می‌توانیم بنویسیم:

$ma^{\frac{1}{n}}\pm ba^{\frac{1}{n}}=(m\pm b)a^{\frac{1}{n}}=(m\pm b)\sqrt[n]{a}$

مثال:

$2(15)^{\frac{1}{3}}+3(15)^{\frac{1}{3}}-(15)^{\frac{1}{3}}=(2+3-1)(15)^{\frac{1}{3}}=4\sqrt[3]{15}$

II: هرگاه در عملیهٔ تقسیم قاعده ها مساوی و توان‌های کسری مختلف باشند برای هر $a\in IR$ طوری که $a\neq 0$ باشد، داریم:

$\dfrac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}}=a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}}=a^{\frac{n-m}{m\cdot n}}=\sqrt[m\cdot n]{a^{n-m}}$

مثال:

$\dfrac{5^{\frac{3}{4}}}{5^{\frac{2}{3}}}=5^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}}=5^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{5}$

III: هرگاه در عملیهٔ ضرب قاعده ها مختلف و توان‌های کسری مساوی باشند برای هر عدد حقیقی b,a و c خلاف صفر می‌توان نوشت:

$a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}\cdot c^{\frac{1}{n}}=(a\cdot b\cdot c)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{abc}$

مثال:

$(7)^{\frac{-5}{8}}\cdot(6)^{\frac{-5}{8}}\cdot(9)^{\frac{-5}{8}}=(7\cdot 6\cdot 9)^{-\frac{5}{8}}=\sqrt[8]{(7\cdot 6\cdot 9)^{-5}}=\dfrac{1}{\sqrt[8]{(7\cdot 6\cdot 9)^{5}}}$

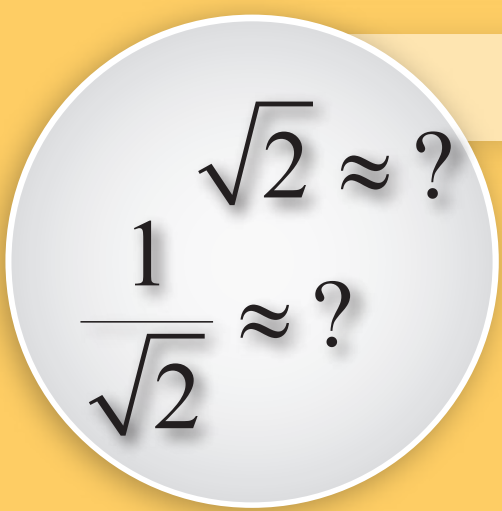
IV:

$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot a^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{m\cdot n}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$

مثال:

$(a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}=(a)^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}=(a)^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{a}$

ناطق سازی یا گویا کردن کسرها



چطور می توانیم که مخرج کسر $(\frac{1}{\sqrt{2}})$ را از شکل جذری بکشیم؟

کار کردن با کسرهای که در مخرج آن‌ها جذر نباشد، آسانتر است. اگر در مخرج کسر عدد جذری موجود باشد، این گونه اعدادکسری را طوری می‌نویسیم که در مخرج کسر، جذر از بین برود؛ ولی چگونه باید این کار را انجام داد؟

فعالیت

• خانه‌های خالی را با اعداد مناسب پرنمایید.

$$\sqrt{3} \times \square = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{2} \times \square = 2$$

$$\frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15 \times \square}{\sqrt{5} \times \square} = \frac{15\,\square}{5} = 3\sqrt{5}$$

با استفاده از فعالیت بالا دیده می‌شود که برای از بین بردن جذر مربع در مخرج یک کسر صورت و مخرج کسر را در مخرج آن ضرب می‌نماییم.

مثال: آیا می‌توانیم در عدد $\frac{1}{\sqrt{2}}$ جذر مربع را از مخرج آن حذف کنیم؟

حل: برای این صورت مخرج را ضرب $\sqrt{2}$ می نمایم.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

فعالیت

• جاهای خالی را پر کنید.

$$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^{\square}}=\square$$

$$\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{\square^{3}}=\square$$

$$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{\square^{\square}}=2$$

$$\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{\square}=\sqrt[3]{\square^{3}}=\square$$

$$\frac{6}{\sqrt[3]{4}}=\frac{6\times\square}{\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[3]{2}}=\frac{6\sqrt[3]{\square}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{\square\sqrt[3]{2}}{2}=3\sqrt[3]{2}$$

از فعالیت بالا نتیجه می گیریم که برای از بین بردن جذر سوم از مخرج یک کسر، باید صورت و مخرج را در جذر سوم عدد ضرب کنیم تا زیر علامت جذر، توان 3 ایجاد شود.

مثال: کسرهای زیر را ناطق سازید:

$a)\ \frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ $\qquad$ $b)\ \frac{5}{\sqrt[3]{5}}$

حل:

$$a)\ \frac{2}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{2\times\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[3]{2}}=\frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{2\sqrt[3]{2}}{2}=\sqrt[3]{2}$$

$$b)\ \frac{5}{\sqrt[3]{5}}=\frac{5\times\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{5^2}}=\frac{5\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}=\frac{5\sqrt[3]{5^2}}{5}=\sqrt[3]{5^2}$$

تمرین

1- کسرهای زیر را ناطق سازید:

$1)\ \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad$ $2)\ \frac{1}{\sqrt{7}}$ $\qquad$ $3)\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$4)\ \frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ $\qquad$ $5)\ \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}$ $\qquad$ $6)\ \frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

نکات مهم فصل اول

• اعداد حقیقی:

1- اتحاد ست اعداد ناطق و غیر ناطق را به نام ست اعداد حقیقی یاد می کنند.

2- هر نقطۀ خط اعداد به عدد حقیقی و به گونۀ معکوس هر عدد حقیقی به یک نقطه، روی خط اعداد مطابقت می کند.

• خواص اعداد حقیقی

1- خاصیت تبدیلی عملیه‌های جمع و ضرب

2- خاصیت اتحادی عملیه‌های جمع و ضرب

3- خاصیت توزیعی عملیۀ ضرب بالای جمع

• جذر مربع تقریبی اعداد:

1 - استخراج جذر مربع تقریبی اعداد تام و جذر اعداد اعشاریه دار به طریقه عمومی

1- قیمت تقریبی جذر مربع به طریقۀ اوسط

• ضرب و تقسیم جذرها

1- ضرب جذرها $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 2 - تقسیم جذر ها $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

در اعداد جذر دار تنها جذرهای مشابه؛ یعنی جذرهای که درجه جذر و اعداد تحت جذر آن‌ها با هم یکسان باشند را با هم جمع و تفریق کرده می توانیم.

• اعداد توان‌دار و قواعد آن

1- $a^0=1$ ، $a\neq 0$ و یک عدد حقیقی ، 2- $a^{-1}=\frac{1}{a}$ ، $a\neq 0$ و یک عدد حقیقی باشد

3- $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ ، $a\neq 0$ و یک عدد حقیقی باشد.

4- ضرب اعداد توان دار $(a^m)^n=a^{m\times n}$ ، $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ، $a^n\times b^n=(a\times b)^n$

5- تقسیم اعداد توان دار $b\neq 0$ ، $\frac{a^n}{b^n}=(\frac{a}{b})^n$ و $a\neq 0$ ، $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

• ناطق یا گویا ساختن کسرها

برای ناطق ساختن یا گویا ساختن یک کسر جذر، مخرج را رفع می‌نماییم.

تمرین عمومی

I. مساوات و افاده‌های زیر را به دقت خوانده، جاهای خالی را با اعداد و کلمات مناسب پر نمایید:

1- $(\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^5 = ... = ...$

2- $a^{-8} \div a^{-1} = ...$

3- $5^9 \times .... = (5 \times 7)^9$

4- عدد π یک عدد.................................... است.

II. عبارت‌های زیر را به دقت خوانده اگر درست است حرف (ص) و اگر غلط است حرف (غ)را پیش روی عبارت بگذارید:

1- (   ) اتحاد اعداد نسبتی و اعداد تام را به نام ست اعداد حقیقی یاد می کنند.

2- (   ) خاصیت توزیعی ضرب بالای عملیهٔ جمع در اعداد حقیقی درست است.

3- (   ) $\sqrt{3}$ عدد غیر ناطق است.

4- (   ) $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

III. برای سؤال‌های زیر چهار جواب داده شده است جواب درست را دریافت و دور آن را حلقه نمایید:

1- $\frac{4^7}{4^5} = ?$

$d)\ 4^1$ $c)\ 4^{-1}$ $b)\ 4^2$ $a)\ 4^0$

2- $(6y^3z^2)^2 = ?$

$d)$ هیچ کدام $c)\ 36y^6z^2$ $b)\ 36y^3z^4$ $a)\ 36y^6z^4$

3- $\sqrt{81 \times 9} = ?$

$d)\ 25$ $c)\ 24$ $b)\ \frac{1}{27}$ $a)\ 27$

4- $\sqrt{\frac{49a^4}{144b^4}} = ?$

$a)\ \frac{8a^2}{12b^2}$ $b)\ \frac{7a^2}{12}$ $c)\ \frac{7a}{12b^2}$ $d)\ \frac{7a^2}{12b^2}$

5- کدام دو عدد افاده‌های جذری متشابه اند؟

$a)\ 2\sqrt{3}\ ,\ 3\sqrt{2}$ $b)\ 5\sqrt{2}\ ,\ 3\sqrt{2}$

$c)\ 5\sqrt{3}\ ,\ 2\sqrt{5}$ $d)\ 6\sqrt{3}\ ,\ \sqrt[3]{3}$

IV. سؤال‌های زیر را حل نمایید:

1- $6\sqrt{125a^2} + \sqrt{5a^2} = ?$

2- قیمت تقریبی $\sqrt{0.5}$ را حساب کنید.

3- افاده‌های زیر را ساده سازید:

$a)\ (-25a^2b)^3 = ?$ $b)\ (-4a \times 2a)^2 = ?$ $c)\ (-2^{-4}x)^3$

4- جذر مربع 2475 را دریافت و امتحان نمایید.

5- افاده‌های زیر را ساده سازید:

$(625a^2b^2)^6\ ,\ (-10^3)^5\ ,\ (-4q^2p^3)^4$

6- افاده‌های زیر را به شکل توان مثبت بنویسید:

$(27)^{-7}\ ,\ (9x^2)^{-4}\ ,\ (6ab)^{-6}$

7- افاده‌های زیر را به شکل توان منفی بنویسید:

$\frac{1}{(36)^2}\ ,\ \frac{26}{(16)^6}\ ,\ \frac{-ab}{(cd)^4}$

8- افاده‌های زیر را ساده سازید:

$(\frac{1}{2})^{-1} \times (\frac{1}{6})^{-1}\ ,\ (\frac{1}{3})^{-4} \times (\frac{1}{5})^{-4}\ ,\ \sqrt{144} \times \sqrt{169}$

$(-6)^3 \times (-6)^{-5}\ ,\ (13a^2)^6\ ,\ \{(\frac{1}{4}xy)^2\}^6$

9- افاده‌های زیر را با هم ضرب نمایید:

$a)\ (3\sqrt{8}+2)(\sqrt{2}-3\sqrt{7})$

$b)\ (\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

10- با دو مثال عددی نشان دهید که: $a^m + a^n \neq a^{m+n}$

11- با دو مثال عددی نشان دهید که: $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$

12- با دو مثال نشان دهید که: $a^m - a^n \neq a^{m-n}$

13- با دو مثال عددی نشان دهید که: $(a-b)^2 \neq a^2 - b^2$

14- افاده‌های زیر را ساده و به شکل جذر بنویسید:

a) $5(25)^{\frac{1}{7}} + 7(25)^{\frac{1}{7}} + 4(25)^{\frac{1}{7}} = ?$ b) $36(15)^{\frac{6}{7}} - 17(15)^{\frac{6}{7}} = ?$

c) $\dfrac{(7)^{\frac{3}{5}}}{(7)^{\frac{3}{5}}} = ?$ d) $\dfrac{(17)^{\frac{2}{9}}}{(7)^{\frac{2}{3}}} = ?$ e) $(17^{\frac{3}{8}})^{\frac{1}{2}} = ?$ f) $(19^{\frac{5}{7}})^{\frac{2}{3}} = ?$

فصل دوم

محاسبات مالی





نسبت
Ratio



برای مالیکول آب فورمول کیمیاوی آن‌را بنویسید، نسبت اتوم‌های هایدروجن و اکسیجن در یک مالیکول آب چند است؟

فعالیت

یک مالیکول آب از دو اتم هایدروجن و یک اتم اکسیجن ترکیب شده است. در جدول زیر نسبت هایدروجن و اکسیجن را بنویسید.

مالیکول آب	1	2	3	4	5
نسبت هایدروجن و اکسیجن	$\frac{2}{1} = 2$				$\frac{10}{5} = 2$

- آیا نسبت هایدروجن بر اکسیجن برای مالیکول‌های مختلف آب ثابت است.

مثال: اگر عرض یک اتاق 3 متر و طول آن 5 متر باشد نسبت عرض و طول آن چند است؟

حل:

$$\frac{3\ \text{متر}}{5\ \text{متر}} = \frac{3}{5}$$ یا $3 \div 5$

فعالیت

- مستطیلی به طول 6cm و عرض 3cm رسم، محیط و مساحت آن را دریافت کنید.
- مستطیل دیگری به طول 4cm و عرض 2cm رسم کنید که نسبت طول مستطیل اولی بر طول مستطیل دومی و عرض مستطیل اولی بر عرض مستطیل دومی را پیدا کنید.
- محیط و مساحت مستطیل دوم را دریافت کنید.
- نسبت محیط مستطیل اول برمحیط مستطیل دوم چند است؟

• نسبت مساحت مستطیل اول بر مساحت مستطیل دوم چند است؟
• چه رابطهٔ بین این نسبت‌ها دریافت کرده می‌توانید؟

تعریف

نسبت بین دو کمیت و یا دو مقدار همجنس عبارت از آن عددی است که نشان می‌دهد کمیت اول چند برابر کمیت دوم و یا کمیت دوم چندم حصهٔ کمیت اول است و یا کمیت دوم چند مرتبه شامل کمیت اول است.

نسبت دو عدد را به طور معمول با علامت‌های خط کسری(ـــــ) ، (÷) یا به (:) نشان می‌دهند.

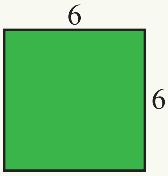
مثال: نسبت 5 بر 3 را به صورت 5÷3، $\frac{5}{3}$ یا 5:3 نیز می‌توان نشان داد.

تمرین

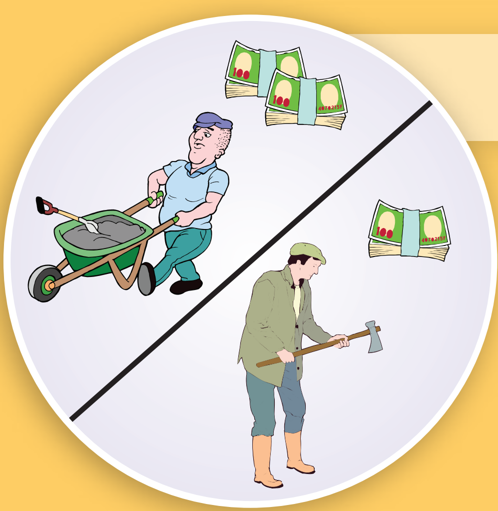
1- نسبت 4 بر 7 حصهٔ یک دایره را با نسبت 16 بر 28 حصهٔ یک دایرهٔ دیگر مقایسه کنید.

2- اگر تعداد گروپ اول شاگردان یک صنف 25 نفر و تعداد گروپ دوم آن 40 نفر باشد نسبت تعداد شاگردان گروپ دوم بر گروپ اول را دریابید.

3- مربعی را طوری رسم کنید که نسبت طول یک ضلع آن با طول یک ضلع مربع رسم شدهٔ زیر برابر $\frac{1}{2}$ باشد. نسبت محیط مربع دوم بر محیط مربع اول و نسبت مساحت مربع دوم بر مساحت مربع اول را پیدا کنید.



تقسیم به اجزای متناسب
Proportional division



دو برادر به طور مشترک یک ساختمان را اعمار می کنند. اگر یکی آن بیشتر از دیگری کار کرده باشد. آیا فکر می کنید به یک اندازه دست مزد به آن‌ها داده شود؟

چطور می‌توان تعیین کرد که به هر کدام چقدر پول باید پرداخته شود؟

فعالیت

سه تن از شاگردان یک صنف روزی تصمیم گرفتند که بین خود میله کنند یکی از شاگردان گفت من سه دانه تخم مرغ و چهار دانه سیب می آورم. دو شاگرد دیگر گفتند ما هم همین چیزها را می آوریم، یعنی تصمیم گرفتند که در مقابل هر سه تخم مرغ، چهار سیب تهیه کنند.

9	6	3	تخم مرغ
		4	سیب
		7	مجموع تخم مرغ و سیب

- جدول مقابل را تکمیل کنید.
- نسبت تعداد تخم‌های مرغ بر مجموع تعداد تخم‌های مرغ و سیب‌ها را در هر یکی از حالت‌های فوق پیدا کنید.
- چه رابطهٔ بین نسبت‌های آن‌ها وجود دارد؟

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم که دو مقدار وقتی با هم متناسب‌اند که نسبت هر مقدار بر مجموع تعداد آن دو مقدار همیشه عدد ثابت‌باشد. از این نتیجه گیری می‌توانیم در حل مسائل استفاده کنیم.

فعالیت

طول و عرض یک قطعه زمین مستطیل شکل، به نسبت 4 بر 3 هستند. اگر محیط این زمین 280 متر باشد. مساحت آن چند متر مربع است؟
برای جواب به این سؤال جدول مقابل را تکمیل کنید.

	مقدار نسبی	مقدار واقعی
طول	4	
عرض	3	
محیط		280
مساحت		

برای تقسیم کردن یک عدد به نسبت‌های داده شده نخست حاصل جمع نسبت‌های داده شده را به‌دست می آوریم. بعد از آن عدد مفروض را به این مجموع تقسیم نموده و خارج قسمت حاصله را به هر یک از نسبت‌های داده شده ضرب می‌نماییم اعدادی که حاصل می‌شوند، حاصل تقسیم عدد مورد نظر به نسبت‌های داده شده است.

مثال: مبلغ 27000 افغانی را می‌خواهیم بین احمد و مسعود به نسبت 2 بر 3 تقسیم کنیم.
نخست جدول زیر را تکمیل می کنیم:

احمد	مسعود	مجموع
2	3	5
x	y	27000

حصهٔ احمد: $x = \frac{27000}{5} \times 2 = 5400 \times 2 = 10800$

حصهٔ مسعود: $y = \frac{27000}{5} \times 3 = 5400 \times 3 = 16200$

تمرین

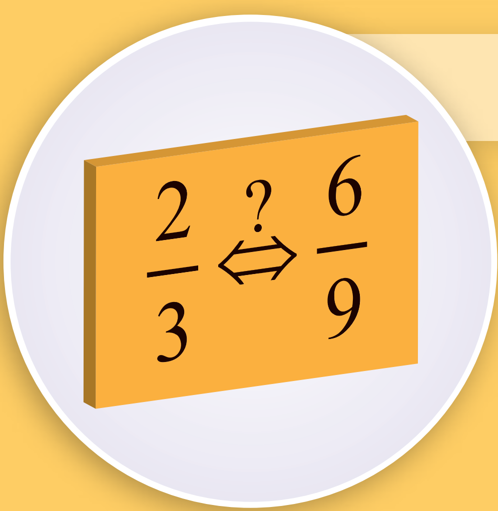
1- اگر نسبت دو عدد $\frac{3}{5}$ و عدد دوم آن 25 باشد، عدد اول را معلوم کنید.

2- دو نفر به طور مشترک کار می کنند که مجموع پول‌های شان 280 افغانی و نسبت بین پول های شان $\frac{3}{4}$ است. آیا دریافت کرده می‌توانید که نفر اول و دوم هرکدام چند افغانی گرفته‌اند؟

3- در قطعه خط $\overline{AB}$ که طول آن 32cm است. نقطهٔ M را طوری تعیین نمایید که قطعه خط مذکور را به نسبت $\frac{AM}{BM} = \frac{3}{5}$ تقسیم کند. طول قطعه خط‌های AM و BM را دریافت کنید.

4- 321,3 سیر گندم را بالای سه نفر دهقان به نسبت 5،7،9 تقسیم کنید.

تناسب
Proportion



• در نسبت $\frac{3}{5}$ چند عدد می‌بینید؟

• چه رابطهٔ بین نسبت‌های $\frac{2}{3}$ و $\frac{6}{9}$ وجود دارد؟

آیا می‌توانید یک نسبت دیگری را بنویسید که با نسبت‌های فوق مساوی باشد؟

فعالیت

نسبت تعداد پنسل پاک‌ها و قلم‌ها 3 بر 4 است.

با در نظر داشت نسبت تعداد پنسل پاک‌ها بر تعداد قلم‌ها، جدول زیر را تکمیل کنید:

تعداد پنسل پاک ها	3	6
تعداد قلم ها	4	
نسبت		

• نسبت تعداد پنسل پاک‌ها بر تعداد قلم‌ها را در هر یکی از حالت‌های داده شده با هم مقایسه کنید.

• در مساوات نسبت‌های فوق؛ یعنی $3:4=6:8$ حاصل ضرب کدام جوره از اعداد با هم مساوی است. چرا؟

چهار عدد وقتی یک تناسب را تشکیل می‌دهند که نسبت عدد اول و دوم مساوی به نسبت عدد سوم و چهارم باشد.

مثال: در نسبت‌های مقابل نسبت‌های مساوی را نشان دهید: $\frac{5}{8}, \frac{9}{6}, \frac{3}{6}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

حل: اگر صورت و مخرج نسبت $\frac{3}{6}$ را اختصار کنیم یعنی صورت و مخرج آن را به 3 تقسیم نماییم $\frac{1}{2}$ به دست می‌آید؛ پس گفته می‌توانیم که هر دو نسبت با هم مساوی‌اند.

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

و در نسبت‌های داده شده هیچ نسبتی را پیدا کرده نمی‌توانیم که با $\frac{5}{8}$ مساوی باشد.
یعنی بین بعضی از نسبت ها رابطهٔ مساوات به وجود آمده نمی‌تواند.

تعریف

تساوی دو نسبت را تناسب گویند؛ مثال: $\frac{10}{16}=\frac{5}{8}$ یک تناسب است که از نسبت‌های $\frac{5}{8}$ و $\frac{10}{16}$ به دست آمده است.
تناسب فوق را به شکل زیر هم نوشته کرده می‌توانیم:

$$5 : 8 = 10 : 16$$

در این‌جا صورت نسبت اول و مخرج نسبت دوم را به نام طرفین و مخرج نسبت اول و صورت نسبت دوم را به نام وسطین تناسب یاد می‌نمایند.

$$5 : 8 = 10 : 16$$



تمرین

1- در نسبت‌های زیر کدام جورهٔ نسبت‌ها با هم یک تناسب را تشکیل می‌دهند.

$a)\ \frac{3}{8}\ ,\ \frac{12}{30}$ $\qquad$ $c)\ \frac{7}{3}\ ,\ \frac{35}{15}$

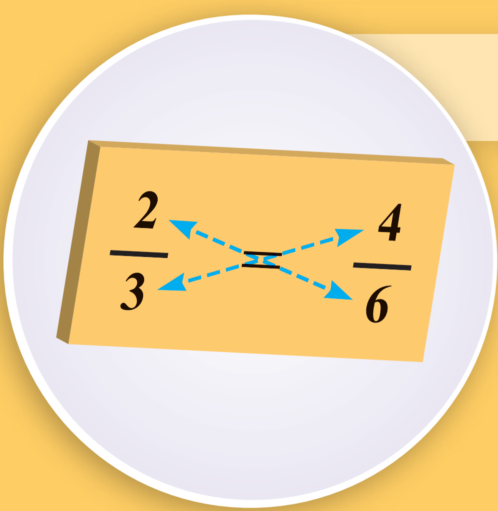
$b)\ \frac{2}{5}\ ,\ \frac{40}{100}$ $\qquad$ $d)\ \frac{49}{35}\ ,\ \frac{7}{5}$

2- سه حد یک تناسب داده شده است، حد دیگر آن را دریافت کنید:

a) $\frac{2}{6}=\frac{5}{\square}$ $\qquad$ b) $\frac{14}{8}=\frac{7}{\square}$ $\qquad$ c) $\frac{1}{3}=\frac{2}{\square}$

d) $\frac{\square}{9}=\frac{3}{27}$ $\qquad$ e) $\frac{\square}{8}=\frac{6}{12}$ $\qquad$ f) $\frac{\square}{14}=\frac{21}{7}$

خواص تناسب
Properties of proportion



• چهــار عدد را طوری انتخاب کنید که یک تناسب را تشکیل دهد.

• در تناســب تشــکیل شده چه رابطه بین اعداد دریافت کرده می توانید؟

فعالیت

با توجه به قیمت‌های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید:

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	a . d	b . c
4	12	2	6	$\frac{4}{12}$			
5	20		8		$\frac{2}{8}$	40	

•در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ، (a ، b) و(c ، d) چه نام دارند؟

• برای تمام قیمت‌های جدول در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ حاصل ضرب $a \cdot b$ و $b \cdot c$ را باهم مقایسه کنید.

به صورت عموم گفته می توانیم:

خاصیت اول: در دو نسبت مساوی که یک تناسب را تشکیل می دهند. حاصل ضرب طرفین مساوی به حاصل ضرب وسطین است.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

مثال: با استفاده از خاصیت موجود بین طرفین و وسطین در یک تناسب حد نامعلوم را پیدا کنید.

حل:

$$\frac{2}{5}=\frac{\square}{12}$$

$$2 \times 12 = 5 \times \square$$

$$\square = 24 \div 5 = 4.8$$

فعالیت

با توجه به قیمت‌های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید.

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a}{c}$	$\frac{b}{d}$	$\frac{d}{b}$	$\frac{c}{a}$
3	4	6	8	$\frac{3}{4}$					
9	12	21	28			$\frac{9}{21}$			

برای تمام قیمت‌های جدول نسبت‌های $(\frac{a}{b},\frac{c}{d}),(\frac{a}{c},\frac{b}{d})$ و $(\frac{d}{b},\frac{c}{a})$ را ببنید که هر جوره از نسبت‌ها، تناسب را تشکیل می‌دهد یا خیر؟

به صورت عموم می‌توان گفت:

خاصیت دوم: اگر در یک تناسب جاهای وسطین را تبدیل کنیم $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ دست می آید.

خاصیت سوم: هرگاه در یک تناسب جاهای طرفین را تبدیل نماییم، $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ تناسب جدید تشکیل می‌شود.

مثال: نسبت طول و عرض یک مستطیل $\frac{4}{3}$ است. اگر طول و عرض این مستطیل را 2 برابر کنیم. نسبت طول و عرض مستطیل جدید چقدر است؟ آیا نسبت طول و عرض هر دو مستطیل یک تناسب را تشکیل می‌دهد؟

حل: نسبت طول و عرض مستطیل جدید $\frac{8}{6}$ است.

$$\frac{4}{3}=\frac{8}{6}\Rightarrow 4\times6=8\times3$$

برای این که بدانیم آیا نسبت‌های $\frac{4}{3}$ و $\frac{8}{6}$ یک تناسب را تشکیل می‌دهد یا خیر؟ باید حاصل ضرب طرفین مساوی به حاصل ضرب وسطین شود.

فعالیت

با توجه به قیمت‌های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید.

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{d}{c}$
2	3	8	12	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{2}$	
6	9	10	15		$\frac{10}{15}$		

نسبت‌های $(\frac{c}{d},\frac{a}{b})$ و $(\frac{d}{c},\frac{b}{a})$ را برای تمام اعداد جدول ببنید که تناسب را می‌سازد یا خیر؟

به صورت عموم گفته می‌توانیم:

خاصیت چهارم: اگر دو نسبت یک تناسب را تشکیل دهد، معکوس آن‌ها نیز یک تناسب را تشکیل می‌دهد.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

فعالیت

با توجه به قیمت‌های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید.

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a+b}{b}$	$\frac{c+d}{d}$	$\frac{a-b}{b}$	$\frac{c-d}{d}$
6	9	12	18	$\frac{6}{9}$		$\frac{6+9}{9}$			
12	18	24	36		$\frac{24}{36}$				

برای تمام قیمت‌های جدول نسبت‌های $(\frac{a}{b},\frac{c}{d})$، $(\frac{a+b}{b},\frac{c+d}{c})$ و $(\frac{a-b}{b},\frac{c-d}{d})$ را ببینید که هر جوره از نسبت‌ها تناسب را تشکیل می‌دهد یا خیر؟

به صورت عموم می گوییم:

خاصیت پنجم: هر گاه دو نسبت یک تناسب را تشکیل دهد و صورت هر نسبت را با مخرج جمع و حاصل آن را بر مخرج اولی آن بنویسیم یک تناسب جدید حاصل می‌شود.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

خاصیت ششم: هر گاه در یک تناسب از صورت هر نسبت مخرج را تفریق و حاصل را بر مخرج اولی آن بنویسیم یک تناسب جدید حاصل می‌شود.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

فعالیت

با توجه به قیمت‌های داده شده، جدول زیر را تکمیل کنید:

a	b	c	d	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{d}$	$\frac{a+c}{b+d}$
1	2	7	14		$\frac{7}{14}$	
3	4	6	8			$\frac{3+6}{4+8}$

برای تمام قیمت‌های جدول نسبت‌های $(\frac{a}{b},\frac{c}{d})$ ، $(\frac{a}{b},\frac{a+c}{b+d})$ و $(\frac{c}{d},\frac{a+c}{b+d})$ را ببینید که هر جوره از نسبت‌ها، تناسب را تشکیل می‌دهد یا خیر؟

به صورت عموم می گوییم:

خاصیت هفتم: اگر در یک تناسب صورت‌ها را با هم جمع نموده در صورت و مخرج‌ها را با هم جمع نموده در مخرج بنویسیم . نسبت جدید با هر نسبت تناسب داده شده مساوی است و تناسب‌های جدید را تشکیل می‌دهند.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d},\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

مثال:

$$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\Rightarrow\frac{3+6}{4+8}=\frac{9}{12}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}\Rightarrow 3\times12=4\times9$$

$$\frac{6}{8}=\frac{9}{12}\Rightarrow 6\times12=9\times8$$

تمرین

1- تناسب‌های زیر را با در نظر داشت قیمت‌های داده شده به شکل عددی بنویسید:

• اگر $a=10$ ، $b=5$ ، $c=30$ و $d=15$ باشد: $\frac{b}{a-b}=\frac{d}{c-d}$

• اگر $a=8$ ، $b=9$ ، $c=32$ و $d=36$ باشد: $\frac{b}{a+b}=\frac{d}{c+d}$

2- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ باشد با استفاده از خاصیت‌های تناسب چطور می‌توانید که تناسب $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ را به دست آورید؟

انواع تناسب

1-تناسب مستقیم Direct proportion



به خاطر تهیهٔ کارهای دستی، نگران صنف به هر یک از شاگردان 2 بسته کاغذ رنگه داد؛ اگر صنف هشتم 20 نفر شاگرد داشته باشد، چند بسته کاغذ رنگه ضرورت است، تا برای همه شاگردان برسد؟

فعالیت

جدول‌های زیر را با در نظر داشت قیمت‌های داده شدهٔ یک کیلو گرام و ده کیلو گرام بوره تکمیل کنید.

مقدار	1 کیلو گرام	2 کیلو گرام	3 کیلو گرام	4 کیلو گرام	5 کیلو گرام
قیمت	50 افغانی				

مقدار	10 کیلو گرام	9 کیلو گرام	8 کیلو گرام	7 کیلو گرام	6 کیلو گرام
قیمت	500 افغانی				

- با زیاد شدن مقدار بوره، قیمت آن چگونه تغییر می کند؟
- با کم شدن مقدار بوره قیمت آن چگونه تغییر می کند؟
- چه رابطهٔ بین مقدار و قیمت بوره وجود دارد؟

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم:
قیمت بوره با مقدار آن رابطهٔ مستقیم دارد؛ یعنی هر قدر مقدار بوره زیاد شود قیمت آن نیز زیاد می‌شود و هر قدر مقدار بوره کم شود قیمت آن هم کم می‌شود.

تعریف

اگر در یک تناسب با زیاد شدن و یا کم شدن یک مقدار به ترتیب سبب زیاد شدن و یاکم شدن مقدار دیگر شود، این نوع تناسب را تناسب مستقیم می‌نامند، یعنی مقدارهای متذکره با یکدیگر مستقماً متناسب اند.

مثال: اگر قیمت 8 قوطی گوگرد 4 افغانی باشد قیمت 62 قطی گوگرد چند افغانی خواهد بود؟

حل: اگر قیمت 62 قوطی گوگرد m افغانی باشد. چون تعداد قوطی‌های گوگرد به طور مستقیم متناسب به قیمت آن است، پس این یک تناسب مستقیم است.

قیمت	گوگرد
4	8
m	62

$$\frac{8}{62}=\frac{4}{m}$$

$$m=\frac{4\times 62}{8}=31 \text{ افغانی}$$

تمرین

1- مزد 12 نفر کارگر 480 افغانی است. مزد 10 نفر کارگر را معلوم کنید (مزد همهٔ کارگران برابر است.)

2- اگر یک نفر کارگر در 5 روز 1500 افغانی مزد بگیرد، مزد 18 روزهٔ او چند افغانی می‌شود؟

3- برای خریدن 3 متر تکه 330 افغانی ضرورت است. برای خریدن 15 متر تکه چند افغانی به‌کار خواهد بود؟

2- تناسب معکوس
Indirect proportion



• بعـد از پاک کاری صنف، نگران خواسـت که صنف را منظم بسازد. اگر یک شـاگرد صنـف را در 60 دقیقه منظـم کند 6 نفر شـاگرد در چند دقیقـه می‌توانند صنف را منظم کنند؟

فعالیت

اگر یک رنگمال یک اتاق را در چهار روز رنگ کند، پس برای رنگمالی یک اتاق در مدت یک یا دو روز چند کارگر ضرورت است؟
برای جواب سؤال، جدول زیر را با در نظر داشت قیمت‌های داده شده تکمیل کنید:

کار اجرا شده به روز	4 روز	2 روز	1 روز
تعداد کارگر	1		

• با کم شدن تعداد روز، تعداد کارگران زیاد می‌شود یا کم؟
• برای رسیدن به انجام کار میان تعداد روزها و کارگران چه رابطهٔ وجود دارد؟

تعریف

اگر در یک تناسب با زیاد شدن یک مقدار، مقدار دیگری کم و یا با کم شدن یک مقدار، مقدار دیگر زیاد شود؛ این نوع تناسب به نام تناسب معکوس یاد می‌شود؛ یعنی بین کمیت اولی و دومی رابطهٔ معکوس وجود دارد.

مثال: یک مسجد را 20 نفر در 15 روز ترمیم می کنند، اگر بخواهند که این مسجد را در 10 روز ترمیم کنند. برای آن چند نفر کارگر ضرورت است؟
حل: تناسب معکوس است، زیرا برای روزهای کم تعداد زیاد کارگران ضرورت است.

$\frac{1}{\text{روز}}$	نفر
$\frac{1}{15}$	20
$\frac{1}{10}$	m

$$\frac{20}{m}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{10}}=\frac{10}{15} \quad , \quad \frac{20}{m}=\frac{10}{15} \quad , \quad m=\frac{20\times 15}{10}=30$$

تمرین

1- چهار نل، یک حوض را در 8 ساعت پر می کند، 5 نل، این حوض را در چند ساعت پر خواهد کرد؟ قطرهای نل‌ها با هم مساوی اند.

2- یک موتر با سرعت 50 کیلومتر فی ساعت حرکت نموده و فاصلهٔ بین دو شهر را در 3 ساعت طی می کند. اگر سرعت موتر دیگری 75 کیلومتر فی ساعت باشد، فاصله بین دو شهر را در چند ساعت طی می کند؟

تناسب مرکب
compound proportion

$$\frac{5}{3} = \frac{25}{15} = \frac{30}{18}$$

تناسب به چند نوع است؟
یک تناسب می‌تواند تنها مستقیم و یا معکوس باشد؟
آیا تناسبی وجود دارد که هم‌زمان هم مستقیم و هم معکوس باشد؟

فعالیت



به اندازهٔ دو قاشق چای خوری، شربت را در یک گیلاس آب مطابق شکل، حل کرده ایم که نسبت هر گیلاس آب و شربت 1 بر 2 است. جک شکل مقابل گنجایش 2 گیلاس آب را دارد. مطابق شکل 4 قاشق چای خوری شربت را در آن حل کرده ایم. آیا شیرینی آب گیلاس و جک به یک اندازه خواهد بود؟
جدول زیر را تکمیل کنید:

تعداد گیلاس ها	1	2	3	4
تعداد قاشق ها	2		6	

- نسبت تعداد گیلاس‌های آب بر تعداد قاشق‌های شربت را بنویسید.
- چه رابطه بین این نسبت ها وجود دارد؟

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم که هر قدر تعداد گیلاس‌های آب بیشتر یا کمتر شود، تعداد قاشق چای خوری شربت نیز متناسب به آن تغییر می کند، تا نسبت $\frac{1}{2}$ ثابت بماند؛ بنا بر آن جدول فوق یک جدول تناسب است.

یادداشت: جهت تیر به طرف بالا تناسب مستقیم و جهت تیر به طرف پایین تناسب معکوس را نشان می‌دهد.

مثال 1: 5 نفر کارگر برای 4 روز کار 80000 افغانی مزد می گیرند. 8 نفر برای 6 روز کار چند افغانی مزد خواهند گرفت؟

حل: چون رابطه بین نسبت ها مستقیم است. جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

تعداد نفر	روز	مزد
5	4	80000
8	6	x

$$\frac{5}{12}=\frac{80000}{x} \quad , \quad \frac{4\times5}{6\times8}=\frac{80000}{x}$$

$$x=192000$$

مثال 2: اگر 10 نفر، کانالی را به طول 12 متر در 8 روز حفر نمایند، 5 نفر کانال مشابه را که طول آن 15 متر باشد در چند روز حفر کرده می‌توانند؟

حل: متحول مطلوب؛ یعنی تعداد روز ها با تعداد نفرها تناسب معکوس و با طول کانال تناسب مستقیم دارد. پس داریم:

تعداد نفر	طول	روز
10	12	8
5	15	x

$$\frac{8}{x}=\frac{12\times5}{15\times10} \quad , \quad x=\frac{8\times15\times10}{12\times5}$$

$$x=20$$

تعریف

تساوی زیادتر از دو نسبت را تناسب مرکب گویند در تناسب مرکب صورت نسبت اول و مخرج‌های نسبت‌های دیگر را به نام طرفین و مخرج نسبت اول و صورت‌های نسبت‌های دیگر را به نام وسطین تناسب یاد می کنند.

مثال:

$$\frac{2}{3}=\frac{6}{9}=\frac{18}{27}$$

وسطین

طرفین

تمرین

1- تعداد 24 نفر دهقان با کار روزانه 8 ساعت زمینی را به وسعت 2000 متر مربع در ظرف 20 روز بیل می‌زنند، اگر 40 نفر دهقان روزانه 12 ساعت کار کنند، زمینی به وسعت 3000 متر مربع را در چند روز بیل زده می‌توانند؟

2 - اگر برای انتقال 4200 کیلو گرام گندم به فاصلهٔ 810 کیلو متر 500 افغانی ضرورت باشد؛ پس برای حمل و نقل 6000 کیلو گرام گندم به فاصلهٔ 630 کیلو متر چند افغانی ضرورت خواهد بود؟

فیصد
Percentage

$$\frac{15}{100}=\frac{11}{x}$$

$$x=?$$

تیم والیبال یک مکتب از 15 بازی انجام شده در منطقه، 11 بازی را برنده شده است؛ اما تیم والیبال مکتب دیگر از 12 بازی انجام شده در 10 بازی برنده‌شده به نظر شما برد کلی کدام مکتب بیشتر است؟

فعالیت

آب	تیل
20	80
x	100

اگر در 80 لیتر تیل، 20 لیتر آب مخلوط شده باشد؛ پس در 100 لیتر آن، چند لیتر آب مخلوط است؟

- با درنظرداشت قیمت‌های جدول، تناسب را تشکیل دهید.
- با استفاده از خاصیت طرفین و وسطین قیمت x را دریافت کنید.
- آیا گفته می‌توانید که در 100 لیتر تیل، چند فیصد آب وجود دارد؟

مثال 1: شخصی 45000 افغانی را در بانک گذاشت و بعد از مدتی 900 افغانی مفاد کرد. شخص مذکور از سرمایهٔ اصلی خود چند فیصد مفاد گرفته است؟

حل: با استفاده از تناسب می توان نوشت:

نفع	سرمایه
900	45000
x	100

$$\frac{45000}{100}=\frac{900}{x}$$

با استفاده از خاصیت طرفین و وسطین:

$$x=\frac{900\times100}{45000}=\frac{90000}{45000}=\frac{90}{45}=2\%$$

از حل مثال فهمیده می‌شود که در هر 100 افغانی شخص مذکور 2 افغانی یا 2% مفاد کرده است.

مثال 2: در امتحان کانکور پوهنتون از جمله 320 نفر فارغ التحصیل لسیهٔ حبیبیه 256 نفر کامیاب و از جمله 400 نفر فارغ التحصیل لیسهٔ غازی به تعداد 300 نفر کامیاب گردیده‌اند. گفته می‌توانید که کدام یک از مکاتب نامبرده در امتحان به فیصدی بیشتر موفق بوده‌اند؟ فیصدی کامیابی شاگردان را دریافت نمایید.

حل:

فیصدی کامیابی لیسهٔ حبیبیه

$$x=\frac{256\times100}{320}=\frac{2560}{32}=80\% \quad , \quad \frac{256}{x}=\frac{320}{100}$$

کامیاب	فارغ التحصیل
256	320
x	100

فیصدی کامیابی لیسهٔ غازی

$$x=\frac{300\times100}{400}=\frac{300}{4}=75\% \quad , \quad \frac{300}{x}=\frac{400}{100}$$

کامیاب	فارغ التحصیل
300	400
x	100

پس، گفته می‌توانیم که لیسهٔ حبیبیه در امتحان کانکور نسبت به لیسهٔ غازی موفق‌تر بوده است.

تعریف

فیصد، طرز ارائه‌برای کسرهایی است که مخرج آن‌ها 100 باشند. برای نمایش فیصد از علامت % استفاده می‌شود.

تمرین

1- یک دکاندار در یک ماه دو مرتبه مال وارد نموده است. مرتبهٔ اول به سرمایهٔ 25000 افغانی، مبلغ 800 افغانی مفاد نموده و مرتبهٔ دوم از سرمایهٔ 10000 افغانی، مبلغ 330 افغانی مفاد نموده است. مفاد دکاندار مذکور به تناسب سرمایه در کدام مرتبه بیشتر بوده دریافت کنید.

2- عبدالرحیم در مضمون ریاضی از 75 نمره 60 نمره به دست آورده است. فیصدی نمرهٔ عبدالرحیم را در مضمون ریاضی به دست آورید.

3- از مساوات زیر کدام آن‌ها صحیح می‌باشد؟ آن‌هایی که غلط اند، نسبت صحیح آن‌را بنویسید.

$$30\%=\frac{30}{50} \quad , \quad 4\%=\frac{4}{100} \quad , \quad \frac{21}{100}=21\% \quad , \quad \frac{111}{1000}=11\% \quad , \quad 50\%=\frac{1}{2}$$

احدیت (Unitary)



اگر قیمت یک مجموعه به صورت کل داده شده باشد، چگونه می‌توانید قیمت یک دانهٔ آن را دریافت کنید؟

اگر قیمت یک دانه قلم داده شده باشد، آیا قیمت چند دانهٔ آن را پیدا کرده می‌توانید؟

فعالیت

نسبت تعداد پیراهن ها بر تعداد روزهای که یک خیاط می دوزد $\frac{28}{4}$ است؛ یعنی این خیاط 28پیراهن را در 4 روز می‌دوزد، چند پیراهن را در یک روز خواهد دوخت؟

با در نظر داشت متن فوق جدول داده شدهٔ زیر را تکمیل کنید:

x	28	تعداد پیراهن
1	4	روز
		نسبت

- با استفاده از جدول فوق، تناسب را تشکیل دهید.
- با استفاده از خاصیت طرفین و وسطین قیمت x را دریافت کنید.

پس گفته می‌توانیم: اگر قیمت چندین شی داده شده باشد، ما می‌توانیم قیمت یک‌دانهٔ آن را دریافت کنیم.

مثال 1: قیمت یک بیرل تیل(200لیتر) مبلغ 40000 افغانی است. قیمت یک لیتر آن را معلوم کنید.

افغانی	تیل
40000	200
x	1

$$\frac{200}{1} = \frac{40000}{x}$$

$$200x = 40000$$

$$x = \frac{40000}{200} \quad , \quad x = 200$$

مثال 2: یک درجن قلم پنسل (12 دانه) به مبلغ 60 افغانی خریده شده است. قیمت 7 دانه پنسل چند افغانی می‌شود؟

حل: نخست قیمت یک‌دانه قلم را دریافت می کنیم.

تعداد قلم پنسل	افغانی
12	60
1	x

$$\frac{12}{1}=\frac{60}{x}$$

$$12x=60$$

$$x=\frac{60}{12}\quad,\qquad x=5 \text{ افغانی}$$

پس قیمت 7 دانهٔ آن عبارت است از:

$$5\cdot 7=35 \text{ افغانی}$$

در اکثر معاملات تجارتی خرید و فروش اشیا و اجناس به صورت درجن و یا ست صورت می گیرد. بعضی اوقات ضرورت می‌افتد تا قیمت یک و یا چند دانهٔ آن را معلوم کنیم. برای اجرای این عمل از طریقهٔ استفاده به عمل می‌آید که به نام احدیت یاد می‌شود و چنین تعریف می‌شود:

تعریف

احدیت یک طریق محاسبهٔ تناسب مستقیم بوده؛ طوری که نخست قیمت یک واحد را از نسبت مربوط، دریافت و بعد ضرب مقدار داده شده می‌نماییم.

تمرین

1- قیمت 2 متر تکه 300 افغانی است، نخست قیمت یک متر آن را دریافت کنید و سپس بگویید قیمت 17 متر تکه چند افغانی می‌شود؟

2- مصرف انتقال 60 کیلوگرام جنس در یک فاصله، 2400 افغانی می‌شود. نخست قیمت انتقال یک کیلوگرام آن را دریافت کنید و سپس بگویید قیمت مصرف انتقال 35 کیلوگرام آن چند افغانی خواهد شد؟

تخفیف

Discount



بعضی اوقات به مغازه ها رفته باشید و این اعلانات را دیده یا شنیده باشید.

10% تخفیف در قیمت لباس‌های بهاری.

50% تخفیف در فروش سیم کارت.

15% تخفیف در اجناس برقی.

فعالیت

یک شاگرد برای خرید کتاب داستان، به کتاب فروشی مراجعه می کند. قیمت یک جلد کتاب 60 افغانی است و شاگرد مذکور 55 افغانی دارد. کتاب فروش، کتاب مورد نظر را به 55 افغانی بالای آن شاگرد به فروش می‌رساند.

- شاگرد، کتاب را چند افغانی ارزان‌تر از قیمت اصلی آن خریداری نموده است؟
- چند فیصد پول کتاب را از قیمت اصلی آن کمتر پرداخته است؟
- اگر این فیصد، در قیمت اصلی کتاب ضرب گردد، چه عددی را نشان می‌دهد؟

پس می‌توان گفت: به همان اندازهٔ که شاگرد کتاب را کمتر از قیمت اصلی آن خریده است، تخفیف کتاب نامیده می‌شود.

مثال 1: ماشین آب میوه که به 4000 افغانی خریده شده است با تخفیف 8% به فروش می‌رسد. قیمت فروش را معلوم کنید.

حل:

تخفیف	قیمت
8	100
x	4000

$$\text{تخفیف}(x) = 4000 \times \frac{8}{100} = 40 \times 8 = 320 \text{ افغانی}$$

$$\text{قیمت فروش} = 4000 - 320 = 3680 \text{ افغانی}$$

مثال 2: شخصی یک جنس را که قیمت اصلی آن 3000 افغانی است، بعد از تخفیف به 2895 افغانی خرید. معلوم کنید که خریدار جنس را به چند فیصد تخفیف گرفته است؟

حل: نخست تمام تخفیف را به دست می آوریم:

$$3000 - 2895 = 105$$

تمام تخفیف 105 افغانی است. حالا به کمک تناسب تخفیف آن را در 100 افغانی معلوم می کنیم.

تخفیف	قیمت
105	3000
x	100

$$\text{تخفیف } (x) = 100 \times \frac{105}{3000} = \frac{10500}{3000} = 3.5\%$$

$$x = 3.5\%$$

تعریف

پولی را که تاجران برای مشتریان خویش از حیث رقابت و جلب مشتری، از قیمت اصلی آن کم می‌نمایند به نام تخفیف یاد می‌شود. تخفیف از روی صد را نظر به قیمت اصلی به نام تخفیف فیصدی یاد می کنند.

تمرین

1- قیمت اصلی یک بایسکل 5000 افغانی است. هرگاه فروشنده به مشتری خویش 2% تخفیف بدهد قیمت فعلی بایسکل را معلوم کنید.

2- قیمت اصلی یک بخاری گازی 8000 افغانی است، نسبت ضرورت، دکاندار آن را به قیمت 7600 افغانی به فروش می‌رساند. مقدار تخفیف و فیصدی تخفیف آن را معلوم کنید.

3- قیمت یک جاروب برقی 5730 افغانی است و به تخفیف 3% به فروش می‌رسد. قیمت فروش را معلوم کنید.

ربح ساده و مرکب
Simple and compound Intrest



یک دکاندار 1000 افغانی را در یک بانک گذاشت. بعد از یک سال پول خود را دوباره از بانک گرفت مقدار پول آن 1100 افغانی شده بود. از متصدی بانک پرسید که 100 افغانی اضافه شدهٔ چیست؟

تعریف

مفادی که از یک سرمایه در یک مدت معین به نرخ معین از قرار فیصدی معین حاصل می گردد به نام ربح ساده یا Simple Intrest یاد می گردد.

چون ربح ساده به طور مستقیم متناسب به سرمایه و نرخ معین می‌باشد. یعنی:

$$\text{ربح } p = A \cdot R \cdot T$$

در این جاP سرمایه،R نرخ به فیصد و T مدت به سال را نشان می دهد.

مثال 1: ربح 5600 افغانی از قرار نرخ 8% پس از مدت یک سال چند افغانی می شود؟

حل:

$$\text{سرمایه}(A) = 5600$$

$$\text{نرخ }(R) = 8\% = \frac{8}{100}$$

$$\text{مدت }(T) = \text{یکسال}$$

$$\text{ربح } P = A \cdot R \cdot T = 5600 \times 1 \times \frac{8}{100} = 56 \times 8 = 448\text{افغانی}$$

مثال 2: ربح سرمایه 156000 افغانی را به نرخ 13% در مدت 7 ماه حساب کنید.

حل:

$$\text{سرمایه}(A) = 156000$$

$$\text{نرخ}(R) = 13\% = \frac{13}{100}$$

$$\text{مدت }(T) = 7\text{ماه} = \frac{7}{12}\text{سال}$$

$$\text{ربح } P = A \cdot R \cdot T = 156000 \times \frac{13}{100} \times \frac{7}{12} = 11830$$

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید.

مقدار پول اصلی	مقدار پول بعد از 1سال	مقدار پول بعد از 2 سال	مقدار پول بعد از 3 سال	مقدار پول بعد از 4 سال
1000	1100	1210	1331	1464,1

- تفاوت بین مفاد هر سال، نسبت به سال قبلی را در یک جدول نشان دهید.
- تفاوت‌های موجود مقدار ثابت دارند یا خیر؟
- نسبت بین مفاد هر سال نظر به سال قبل را در یک جدول نشان دهید.
- آیا این نسبت‌ها ثابت‌اند.یا خیر؟

تعریف

اگر مفاد یک سرمایه به اصل مقدار سرمایه علاوه گردیده و دوباره به مفاد گذاشته شود سرمایهٔ جدید با مفادی که به دست می‌آید، ربح مرکب نامیده می‌شود که از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود. $P = A(1+r)^n$

در این‌جا P سرمایهٔ جدید با مفاد، A سرمایهٔ اولی، r نرخ به فیصد n مدت به سال را نشان می‌دهد.

مثال: سرمایهٔ 2000000 افغانی با ربح مرکب سالانه %10 در بانک گذاشته می‌شود. بعد از گذشت 5 سال سرمایهٔ مذکور چند افغانی می‌شود؟

حل: قیمت‌ها را در فورمول وضع می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned} A &= 2000000 \\ r &= 10\% \\ n &= 5 \\ P &= ? \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} P &= 2000000(1+\frac{1}{10})^5 = 2000000(1.1)^5 \\ P &= 2000000 \times 1.61051 = 3221000 \\ P &= 3221000 \end{aligned}$$

تمرین

1–احمد 4000 افغانی از قرار نرخ %8 در حساب خود پس‌انداز کرده است، پس از پایان سال، بانک چقدر مفاد برایش خواهد داد؟

2– مقدار 15000 افغانی از قرار نرخ %10 در مدت 3 سال چند افغانی می‌شود؟

نکات مهم فصل دوم

• نسبت

نسبت بین دو مقدار هم‌جنس عبارت از عددی است که نشان می دهد مقدار اول چند برابر مقدار دوم است.

• تقسیم به اجزای متناسبه

برای تقسیم یک عدد به نسبت‌های داده شده نخست حاصل جمع نسبت‌های داده شده را به دست می‌آوریم و بعد از آن، عدد مفروض را به این مجموع نسبت‌ها تقسیم نموده و خارج قسمت را ضرب هر یک از نسبت‌های داده شده می‌نماییم. اعدادی که حاصل می‌شوند حاصل تقسیم عدد مورد نظر به نسبت‌های داده شده است.

• تناسب

مساوات دو نسبت را تناسب گویند.

• خواص تناسب

1- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$

2- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

3- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$

4- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

5- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

6- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

7- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

8- $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

• اقسام تناسب

1- تناسب مستقیم: اگر در یک تناسب زیاد شدن و یا کم شدن مقدار یک کمیت به ترتیب سبب زیاد شدن و یا کم شدن مقدار کمیت دیگر شود، این تناسب را تناسب مستقیم می‌نامند.

2- تناسب معکوس: اگر در یک تناسب با زیاد شدن مقدار یک کمیت، مقدار دیگری کم و یا با کم شدن مقدار یک کمیت، مقدار دیگر زیاد شود این تناسب به نام تناسب معکوس یاد می‌شود.

• تناسب مرکب

تساوی زیادتر از دو نسبت را تناسب مرکب می‌نامند.

• فیصد

فیصد طرز ارائه برای کسرهایی است که مخرج آن 100 باشند.

• احدیت

یک طریقهٔ محاسبهٔ تناسب مستقیم بوده طوری که نخست قیمت یک واحد آن را از نسبت مربوط دریافت و سپس ضرب مقدار داده شده می‌نماییم.

• تخفیف

پولی را که تاجران از حیث رقابت و جلب مشتری از قیمت اصلی آن کم می‌نمایند، به نام تخفیف یاد می‌شود.

• ربح

– ربح ساده: مفادی که از یک سرمایهٔ در یک مدت معین به نرخ معین از قرار فیصدی معین حاصل می گردد به نام ربح ساده یاد می گردد.

$$P = A \cdot R \cdot T$$

– ربح مرکب: هرگاه مفاد یک سرمایه به اصل مقدار سرمایه علاوه گردیده و دوباره به مفاد گذاشته شود سرمایهٔ جدید با مفادی که از سرمایهٔ جدید به دست می آید ربح مرکب نامیده می شود.

• در زیر برای هر سؤال چهار جواب داده شده است، دور جواب صحیح را حلقه بکشید.

$$P = A(1+r)^n$$

تمرينات عمومی

1- نسبت دو کمیت عبارت از یک عددی است که:

a) منفی باشد b) مثبت باشد c) بدون واحد باشد d) هیچ‌کدام

2- علامت فیصد عبارت است از:

a) × b) ÷ c) + d) %

• جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

1- در هر تناسب صورت نسبت اول و مخرج نسبت دوم را به نام .... و مخرج نسبت اول و صورت‌های نسبت‌های دوم را به نام .... یاد می کنند.

2- در تناسب مستقیم هر دو مقدار هم زمان............................ یا .... می‌شوند.

3- مفادی که از یک سرمایه در یک .... معین به یک .... معین از قرار فیصدی معین حاصل می‌گردد به نام .... ساده یاد می‌شود.

4- کسری که مخرج آن .... است به نام .... یاد می‌شود.

• در زیر یک تعداد جملات داده شده است در مقابل جملهٔ صحیح حرف (ص) و در مقابل جملهٔ غلط حرف (غ) بگذارید:

1- ( ) در یک تناسب، صورت نسبت اول و مخرج نسبت دوم را به نام طرفین، مخرج نسبت اول و صورت نسبت دوم را به نام وسطین تناسب یاد می کنند.

2- ( ) هرگاه نفع یک سرمایه دوباره به اصل سرمایه علاوه و به مفاد گذاشته شود سرمایهٔ جدیدی که به دست می‌آید به نام ربح ساده یاد می‌شود.

3- ( ) فیصد کسری است که مخرج آن 100 باشد.

4- ( ) تخفیف، تناسب مستقیمی است که نخست قیمت یک واحد آن را از نسبت مربوطه دریافت و سپس ضرب مقدار داده شده می‌نماییم.

5- ( ) مساوات دو تناسب را نسبت گویند.

سؤال‌های زیر را حل کنید:

1- تعداد شاگردان دو مکتب به ترتیب 720 و 810 نفر اند. نسبت بین شاگردان هر دو مکتب را به دست آورید.

2- در یک باغ 45 اصله درخت سیب، 30 اصله درخت ناک و 75 اصله درخت انار است. نسبت بین دو دو نوع درخت را پیدا کنید.

3- برای خریدن سه متر تکه، 450 افغانی ضرورت است. برای خریدن 15 متر تکه چند افغانی به کار خواهد بود؟

4- یک رستورانت را 27 نفر در 20 روز اعمار می کنند؛ اگر بخواهیم این رستورانت در 15 روز اعمار گردد؛ در چند نفر لازم است؟

5- تعداد داخله یک صنف لیسهٔ عالی ملالی 50 دختر است. معلم آن‌ها می‌خواهد آن‌ها را به دو گروپ طوری تقسیم کند که نسبت بین آن‌ها $\frac{2}{3}$ شود، تعداد هر گروپ را معلوم کنید.

6- زمینی به مساحت $1200m^2$ را 14 نفر به شرط این که روزانه سه ساعت کار کنند در هشت روز بیل می‌زنند، زمینی دیگری که به مساحت $1500m^2$ توسط ده نفر روز شش ساعت کار کنند در چند روز بیل خواهند زد؟

7- ادارهٔ یک لیسه از یک کتاب فروشی به مبلغ 2560 افغانی کتاب خریداری نموده است. برای این که کتاب فروش خریدار مذکور را برای آینده مشتری خود بسازد. 5 فیصد پول کمتر از قیمت اصلی آن اخذ می کند معلوم کنید که ادارهٔ لیسه چند افغانی به کتاب فروش داده است؟

8- مجموعهٔ سرمایه‌های دو تاجر که طور مشترک با هم تجارت می کنند 2540000 افغانی و نسبت سرمایه‌های آن‌ها $\frac{3}{5}$ است. سرمایهٔ هر کدام آن‌ها را معلوم کنید.

9- سرمایهٔ 12000 افغانی با ربح مرکب سالانه 6 فیصد در بانک گذاشته می‌شود بعد از گذشت 4 سال، سرمایهٔ مذکور چند افغانی می‌شود؟

10- هر گاه نفوس یک قریه یک سال قبل 600 نفر، احصائیه گیری شده باشد و جمعیت قریه سالانه 3 فیصد زیاد شده باشد، نفوس فعلی قریه چند نفر است؟

11- مفاد 4800 افغانی از قرار نرخ 9 فیصد در مدت یک‌سال چند افغانی می‌شود؟

فصل سوم

مشابهت‌ها





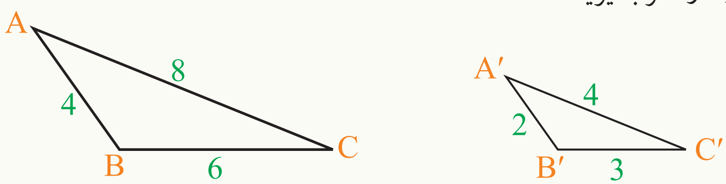
اشکال متشابه



آیا اشـــکال همانند را بـــه اندازه‌های مختلف دیده‌اید ؟
در اطــراف ما اشـــکالی وجود دارند که اندازه‌های شان مساوی نبوده؛ اما هم شکل می‌باشند؛ مثال: تصویر تاق ظفر پغمان که یکـــی از آن‌ها بزرگ و دیگری کوچک است؛ ولی از نظر شکل آن‌ها را باهم مشابه می‌بینیم.

فعالیت

دو مثلث زیر را در نظر بگیرید:

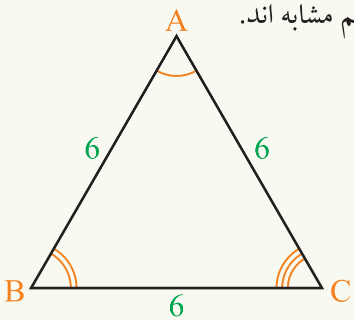


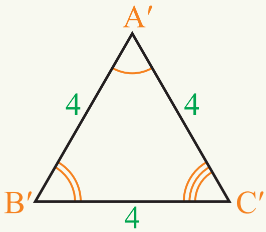
- آیا فکر می کنید که این دو مثلث با هم مشابه اند؟
- در مثلث‌های بالا ضلع‌های متناسب و زاویه‌های مساوی آن‌ها را مشخص کنید.
- زاویه‌های مساوی را توسط نقاله اندازه گرفته و باهم مقایسه کنید.
- نسبت‌های اضلاع متناسب را حساب نمایید.

فعالیت فوق به ما نشان می‌دهد که:

در اشکال مشابه زوایای مقابل اضلاع متناسب یک به یک با هم انطباق پذیر اند و نسبت اضلاع متناسب دارای مقدار ثابت بوده که این مقدار ثابت را نسبت تشابه می گویند. هرگاه دو شکل باهم چنین رابطهٔ داشته باشند، مشابه اند. اشکال مشابه را به علامت (~) نمایش می‌دهیم.

مثال: نشان می‌دهیم که دو مثلث متساوی الاضلاع با هم مشابه اند.





حل: تمام زوایای هر دو مثلث با هم انطباق پذیر اند.

$$\hat{A} \cong \hat{A}' \ , \ \hat{B} \cong \hat{B}' \ , \ \hat{C} \cong \hat{C}'$$

تناسب بین اضلاع وجود دارد.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

پس :

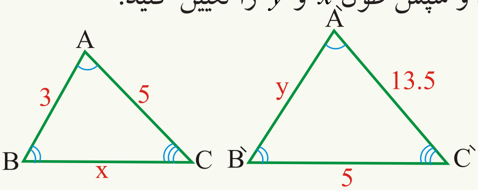
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

تمرین

1- کدام یک از جمله‌های زیر همیشه درست نیست، برای هر یک مثال دهید.

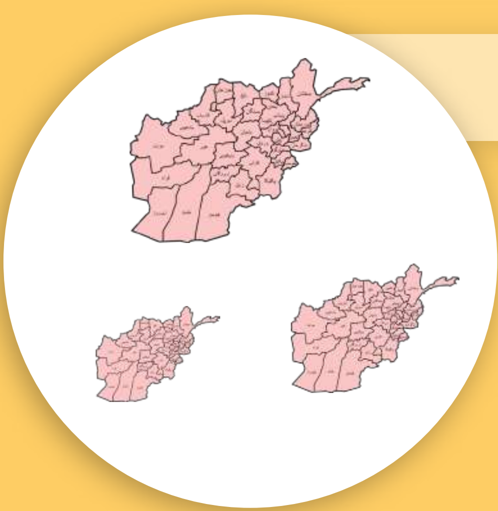
- دو مربع همیشه باهم مشابه اند.
- دو مثلث همیشه باهم مشابه اند.
- دو مستطیل همیشه باهم مشابه اند.
- دو مثلث متساوی الساقین همیشه باهم مشابه اند.
- دو لوزی همیشه باهم مشابه اند.

2- مثلث‌های $A'B'C'$ و ABC متشابه‌اند. زاویه‌های آن‌ها مشخص شده است.
نسبت بین ضلع‌های مقابل آن‌ها را بنویسید و سپس طول x و y را تعیین کنید:



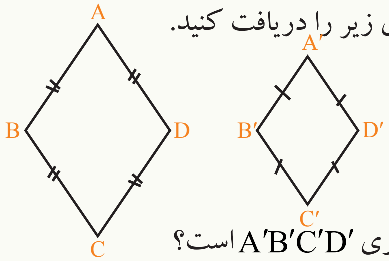
3- دو پنج ضلعی مشابه رسم کنید.

مضلعات متشابه



آیا دو نقشهٔ زیر نقشه بالا به یک اندازه کوچک شده‌اند؟

فعالیت



با در نظرداشت شکل و استفاده از خط کش نسبت‌های زیر را دریافت کنید.

$$\frac{BC}{B'C'}=\square \qquad \frac{AB}{A'B'}=\square$$

$$\frac{AD}{A'D'}=\square \qquad \frac{CD}{C'D'}=\square$$

- اضلاع لوزی ABCD بالترتیب چند برابر اضلاع لوزی A′B′C′D′ است؟
- زاویه‌های ABCD و A′B′C′D′ را اندازه بگیرید. چه رابطه میان آن‌ها وجود دارد؟

فعالیت فوق دیدیم که نسبت اضلاع متناسب در دو شکل همواره ثابت و باهم مساوی می‌باشند و زاویه‌های مقابل اضلاع متناسب باهم مساوی اند؛ پس دو شکل با هم مشابه اند در نتیجه می توانیم که:

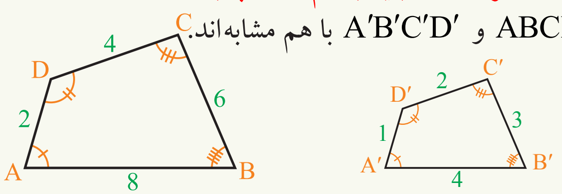
چند ضلعی‌ها در صورتی با هم مشابه‌اند که دارای خواص زیر باشند:

1- تعداد رأس های‌شان با هم مساوی باشند.

2- تمام زوایا در مضلعات مشابه باید یک به یک با هم انطباق پذیر باشند.

3- اضلاعی که در مقابل زاویای مساوی قرار دارند باید با هم متناسب باشند.

مثال: نشان می‌دهیم که دو مضلع ABCD و A′B′C′D′ با هم مشابه‌اند.



حل: با استفاده از نقاله در شکل دیده می‌شود که:

1- زاویه‌ها با هم انطباق پذیر اند.

$\hat{A} \cong \hat{A'}\ ,\ \hat{B} \cong \hat{B'}\ ,\ \hat{C} \cong \hat{C'}\ ,\ \hat{D} \cong \hat{D'}$

2- تناسب بین اضلاع وجود دارد.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DA}{D'A'} = 2$$

$$\frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$$

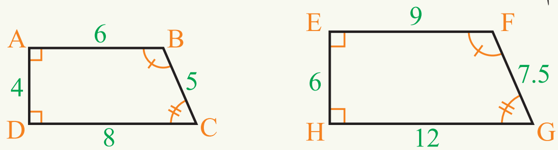
پس دو شکل با هم مشابه اند.

در مثال فوق نسبت تشابه بین اضلاع 2 می‌باشد؛ یعنی اضلاع مضلع ABCD دو برابر اضلاع مضلع $A'B'C'D'$ می‌باشد. $ABCD \sim A'B'C'D'$

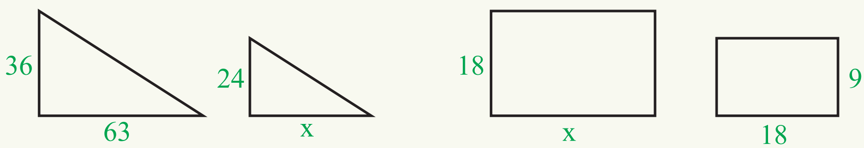
سؤال: اضلاع مضلع $A'B'C'D'$ چند برابر اضلاع مضلع ABCD است؟

تمرین

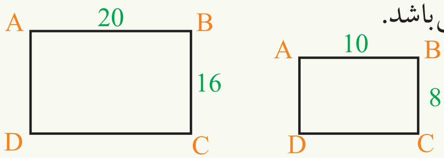
1- نشان دهید که اشکال زیر با هم مشابه اند:



2- هر جوره اشکالی که در کنار هم رسم شده باهم مشابه‌اند. طول مجهولی که با x نشانی شده است حساب کنید:



3- در شکل زیر نشان دهید که در دو مستطیل مشابه، نسبت طول و عرض مستطیل اول مساوی به نسبت طول و عرض مستطیل دوم می‌باشد.



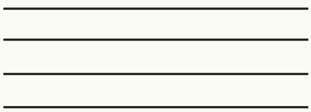
4- آیا تمام اشکال انطباق پذیر با هم مشابه‌اند؟ در این صورت، ضریب تشابه چند است؟ با یک مثال نشان دهید:

خطوط موازی



فاصلــه میان خطوط ریــل با هم چه رابطه دارند؟

فعالیت



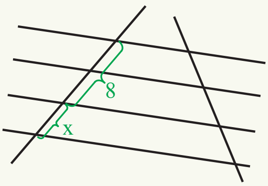
- چهار خط موازی مقابل را در نظر بگیرید.
- خط عمودی بر این چهار قطعه خط رسم کنید.
- قطعه خط‌هایی را که بین خطوط موازی توسط خط قاطع ایجاد شده است اندازه بگیرید.
- یک خط دیگر رسم کنید که این چهار خط موازی را قطع کند.
- قطعه خط‌هایی را که توسط این قاطع و خطوط موازی به دست آمده اند اندازه بگیرید و بگویید که باهم چه رابطه دارند؟
- یک قاطع کیفی دیگر رسم کنید و فعالیت بالا را انجام دهید.

از فعالیت فوق می‌توان تعریف زیر را بیان کرد:

تعریف

اگر چند خط موازی که فاصله‌ها بین شان مساوی باشند توسط یک خط مستقیم قاطع، قطع گردند، خطوط موازی بر روی خط قاطع قطعات مساوی را جدا می کنند.

مثال: درشکل زیر خطوط موازی به فاصله‌های مساوی داده شده، فاصله x را به دست آورید.



حل: چون مجموع دو قطعه خط ایجاد شده بین خطوط موازی توسط قاطع دو برابر(8 واحد) است؛ پس طول هر قطعه چهار واحد می‌شود. چون x مساوی به هر یک از این قطعات است؛ پس: $x = 4$ می‌باشد

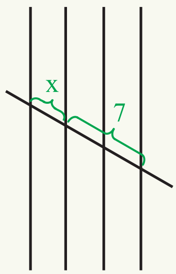
فعالیت

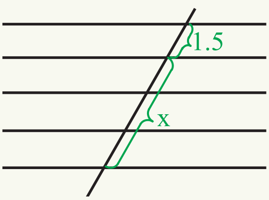
1- قطعه خط کیفی AB را رسم کنید.
2- در نقطهٔ A یک خط مستقیم کیفی AX را طوری رسم کنید که با خط AB زاویه حاده بسازد.
3- روی نیم خط AX از نقطهٔ A شروع کرده و 5 واحد مساوی پی‌هم جدا کنید. این نقاط را M، N، P، Q و C بنامید.
4- نقطه C را به B وصل کنید.
5- حال از نقاط M، N، P، Q خطوط موازی با خط مستقیم $\overline{BC}$ رسم کنید:
6- پنج قطعه خطوط ایجاد شده باهم چه رابطه دارند؟

از خاصیت خطوط موازی با فاصله‌های مساوی برای تقسیم یک قطعه خط به قسمت‌های مساوی می‌توان استفاده کرد.

تمرین

1- در هر یک از شکل‌های زیر خطوط موازی به فاصله‌های مساوی داده شده اند، قیمت x را به دست آورید.





2- دو قطعه خط رسم کنید؛ سپس یکی از آن‌ها را به سه قسمت و دیگری را به چهار قسمت مساوی تقسیم کنید.
3- قطعه خطی را به طول 12cm رسم نموده و سپس آن را به 8 قسمت مساوی تقسیم کنید.



قضیهٔ تالس
(Thales)

تعمیری را که در شــکل می‌بینید چند طبقه دارد؟

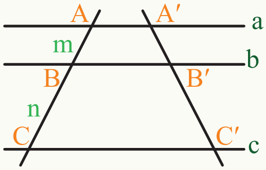
آیــا فاصله‌های طبقه‌ها با هم مســاوی اند؟

فعالیت

- سه خط موازی a، b و c را طوری رسم کنید که هم فاصله نباشند.
- دو قاطع را (یک دیگر خود را قطع نکند) رسم کنید که خطوط موازی را به ترتیب در نقاط A، B، C و A′، B′ و C′ قطع کنند.
- نسبت‌های زیر را دریافت کنید:

$$\frac{AB}{BC} = ?$$

$$\frac{A'B'}{B'C'} = ?$$



- قاطع کیفی دیگری را رسم نموده و نسبت قطعه خط‌های ایجاد شده را دریافت کنید.

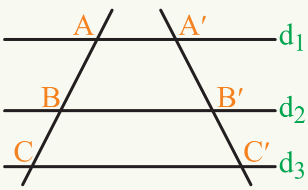
تا لس ریاضی دان یونانی(548- 624 قبل از میلاد) نتیجهٔ فعالیت فوق را به شکل زیر بیان کرد:

قضیهٔ تالس: هرگاه دو یا چندین قطعه خط موازی توسط دو خط قاطع قطع گردند، بر روی آن‌ها قطعات متناسب جدا می کنند.

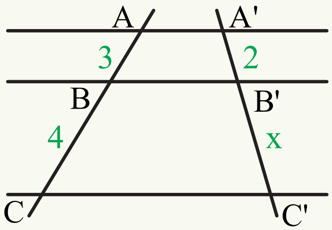
طبق شکل زیر d_1، d_2 و d_3 سه خط مستقیم موازی اند.

پس:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$



مثال: در شکل مقابل قیمت x را حساب کنید:



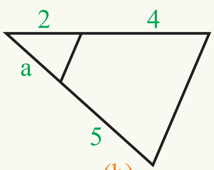
حل:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{2}{x}$$

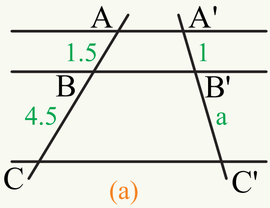
$$x = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

تمرین

1-در هر یک از اشکال زیر قیمت a را دریافت کنید.



(b)

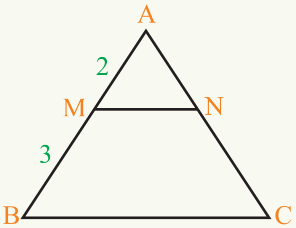


(a)

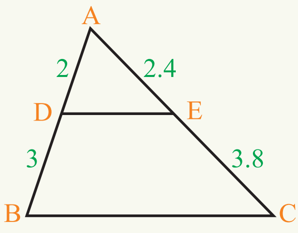
2- شکل مقابل را در نظر گرفته نسبت‌های زیر را بنویسید.

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} = ? \qquad \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = ?$$

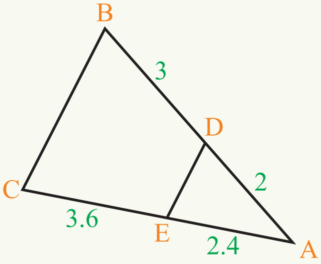
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = ? \qquad \frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = ?$$



3- در کدام شکل زیر $\overline{DE}$ موازی با $\overline{BC}$ است؟



(b)



(a)



قضیهٔ تالس در مثلث

آیــا می‌توانید خطوط مــوازی را در مثلث ببینید؟

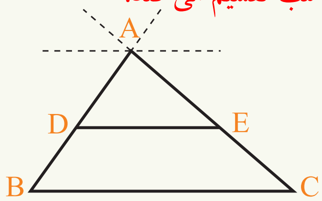
فعالیت

- یک مثلث کیفی رسم نموده یک نقطه را روی یکی از اضلاع آن در نظر بگیرید.
- از این نقطه خطی موازی با یک ضلع مثلث رسم نمایید که ضلع دیگر مثلث را قطع کند، مثلث ایجاد شده را نامگذاری کنید.
- نسبت هر ضلع مثلث ایجاد شده را بر اضلاع متناسب مثلث اولیه بنویسید.

این نسبت‌ها چه رابطه با هم دارند؟

با انجام فعالیت بالا قضیهٔ زیر را می‌توان بیان کرد:

قضیهٔ 1: هرگاه از یک نقطه یک ضلع مثلث یک خط طوری رسم شود که با یک ضلع مثلث موازی باشد پس دو ضلع دیگر مثلث را به گونهٔ متناسب تقسیم می کند.

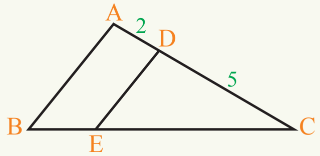


$$\overline{DE} \,//\, \overline{BC} \Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

قضیهٔ 2: اگر در مثلث ABC شکل فوق نقطهٔ D بالای ضلع AB و نقطهٔ E بالای ضلع AC طوری واقع باشد که $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ وجود داشته باشد پس در نتیجه $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ است.

این رابطه را به عنوان معکوس قضیهٔ تالس می‌شناسیم.

مثال 1: در شکل زیر $AB \parallel DE$ و $\frac{5}{2}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}}$ است. نسبت $\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}$ مساوی به چند است؟



حل: چون $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ است.

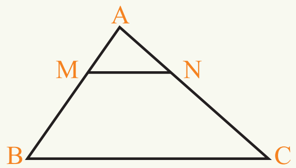
تناسب بین اضلاع وجود دارد، و نظر به قضیهٔ تالس

$\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{DA}}=\frac{5}{2}$ پس: $\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}=\frac{5}{2}$

مثال 2: درمثلث ABC روی ضلع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ دو نقطهٔ M و N را طوری انتخاب کنید

که $AM=\frac{1}{3}AB$, $AN=\frac{1}{3}AC$ باشد.

آیا MN با BC موازی شده می‌تواند؟



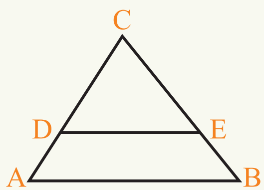
حل: از روابط فوق می‌توان نوشت: $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{1}{3}$, $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}=\frac{1}{3}$

از مقایسهٔ روابط بالا داریم: $\frac{\overline{AN}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}$

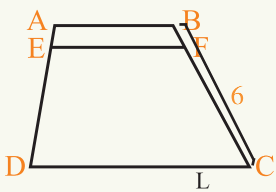
چون تناسب بین اضلاع وجود دارد نظر به معکوس قضیهٔ تالس می‌توان نوشت:

$MN \parallel BC$

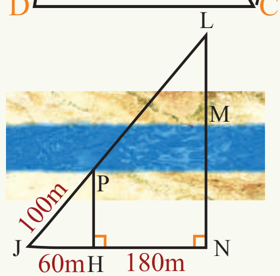
تمرین



1- در شکل مقابل $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{AC}=12cm$، $\overline{BC}=15cm$ و $\overline{EB}=5cm$ است طول‌های AD ، DC و EC را معلوم کنید.

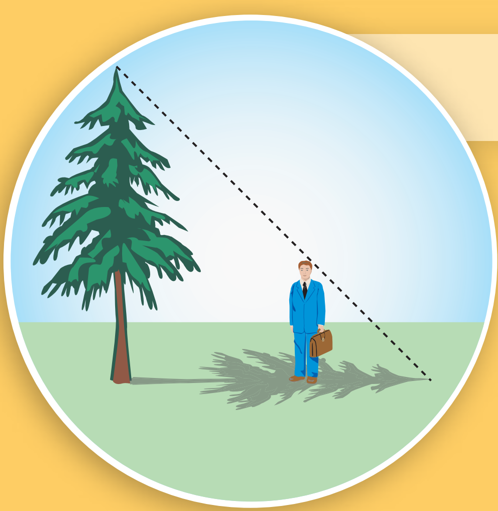


2- در ذوذنقه ABCD، $\overline{EF} \parallel \overline{CD}$ و $\overline{AE}=\frac{1}{7}\overline{ED}$، $\overline{BC}=6$ است. BF و FC را دریابید.



3- قریهٔ L در یک سوی رودخانه و پایه‌های انتقال برق در سوی دیگر رودخانه واقع است. با درنظر داشت فاصله‌های داده شده در شکل، طول سیم مورد ضرورت را برای برق رسانی به قریه، یعنی طول JL را محاسبه کنید.

حالت‌های تشابه مثلث‌ها
حالت اول



آیا می توانید با داشتن طول سایهٔ احمد و درخت، ارتفاع درخت را دریافت کنید؟

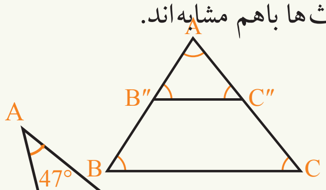
فعالیت

- مثلث‌های ABC و $A'B'C'$ را قسمی رسم کنید که $\hat{A}=\hat{A}'$ و $\hat{B}=\hat{B}'$ باشند.
- B'' را روی ضلع AB طوری انتخاب کنید که $\overline{AB''}=\overline{A'B'}$ باشد.
- با ترسیم یک خط از نقطهٔ B'' زاویهٔ را ترسیم کنید که با B' مساوی باشد و ضلع AC را در نقطهٔ C'' قطع کند. آیا BC موازی با این خط است؟ چرا؟
- مثلث‌های $AB''C''$ و $A'B'C'$ چه رابطهٔ با هم دارند؟
- در مثلث ABC، $\overline{BC}\parallel\overline{B''C''}$ است. رابطهٔ تالس را بنویسید.
- آیا نتیجه گرفته می توانید که $\overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{AB''C''}$؟

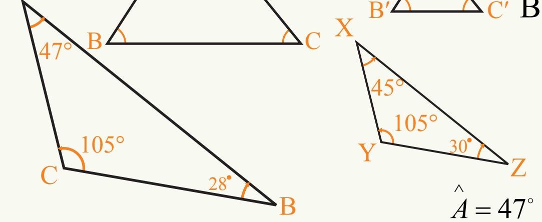
در فعالیت فوق دیدیم که $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{AB''C''}$ بایکدیگر مشابه بوده و چون $\overset{\Delta}{A'B'C'}\cong \overset{\Delta}{AB''C''}$
پس: $\overset{\Delta}{A'B'C'}\sim \overset{\Delta}{ABC}$ است.

قضیه: هرگاه دو مثلث دو زاویهٔ مساوی داشته باشند؛ پس مثلث‌ها باهم مشابه‌اند.

پس: $\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}=\hat{B}'\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$



مثال: آیا مثلث‌های زیر باهم مشابه هستند؟



حل: از شکل دیده می‌شود که:

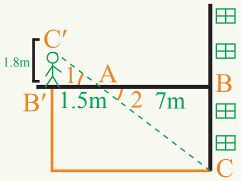
$\hat{B}=28^\circ$ ، $\hat{C}=\hat{Y}=105^\circ$ ، $\hat{X}=45^\circ$ ، $\hat{A}=47^\circ$

و $\hat{Z}=30^\circ$ دیده می‌شود که زوایای دو مثلث یک به یک با هم مساوی نیستند بنابراین $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{XYZ}$ با هم مشابه نیستند.

مثال: دو قسمت مختلف یک شفاخانه به وسیلهٔ یک پل هوایی با هم ارتباط داده شده اند. محسن برای پیدا کردن ارتفاع این پل مانند شکل زیر در یک انتهای آن ایستاده و شعاع دید خود را بر رأس زاویه بین خط دید و ساختمان قرار داد.

چرا دو مثلث ABC و $AB'C'$ با هم مشابه اند؟

با توجه به اندازه‌های مشخص شده در شکل، اگر طول قد محسن $1{,}8m$ باشد ارتفاع پل یعنی BC را به دست آورید.



حل: در شکل دیده می‌شود که: $\hat{B}=\hat{B}'=90^\circ$

قرار مقابل به رأس $\hat{A}_1=\hat{A}_2$

پس: $\hat{C}=\hat{C}'$

نظر به حالت اول تشابه $\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{AB'C'}$

چون مثلث‌ها متشابه اند؛ پس تناسب بین اضلاع آن‌ها وجود دارد.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}}$$

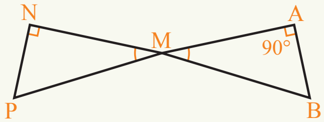
$$\frac{\overline{BC}}{1.8m}=\frac{7m}{1.5m}\quad,\quad \overline{BC}=\frac{7m\cdot 1.8m}{1.5m}=\frac{7\cdot 18m^2}{15m}$$

$$\overline{BC}=\frac{42}{5}m$$

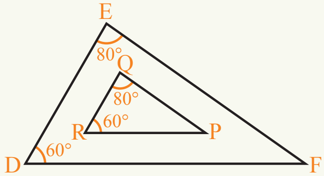
$$\overline{BC}=8.4m$$

تمرین

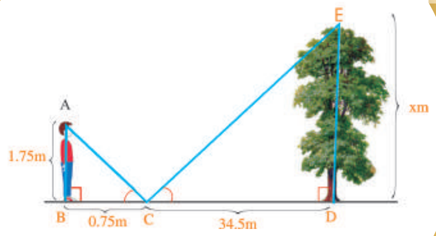
1- در شکل مقابل ثابت کنید که: $\overset{\Delta}{NMP}\sim\overset{\Delta}{MAB}$



2- در شکل مقابل نشان دهید که: $\overset{\Delta}{RQP}\sim\overset{\Delta}{DEF}$

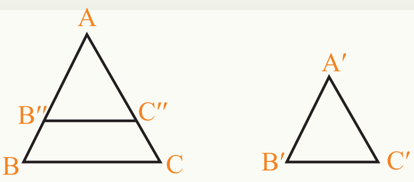


حالت دوم



چگونه می توان ارتفاع درخت را محاسبه کرد؟

فعالیت



در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ ، $\hat{A}=\hat{A'}$ و $\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}$ را در نظر بگیرید.

• نقطهٔ B'' را روی ضلع AB طوری انتخاب کنید که $\overline{AB''}=\overline{A'B'}$ شود.

• از نقطه B'' خطی موازی به ضلع BC رسم کنید و نقطهٔ تقاطع آن را C'' بنامید.

• رابطهٔ تالس را در $\overset{\Delta}{ABC}$ بنویسید.

• در تناسب $\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}$ قیمت‌های مساوی $A'B'$ و $A'C'$ را وضع نمایید.

• از تناسب $\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}$ و $\frac{AC}{AC''}=\frac{AB}{AB''}$ چه رابطه به دست آورده می‌توانید؟

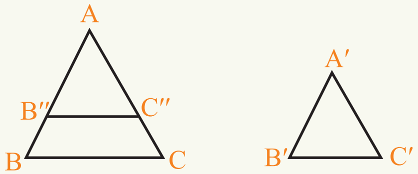
• آیا دو مثلث $A'B'C'$ و $AB''C''$ با هم انطباق پذیر اند؟ چرا؟

• دو مثلث ABC و $AB''C''$ باهم چه رابطه دارند. چرا؟

• آیا می توان تشابه $\overset{\Delta}{ABC}$ و $A'\overset{\Delta}{B'}C'$ را نتیجه گرفت؟

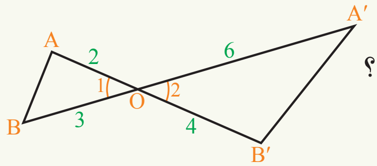
در فعالیت فوق دیدیم که: $A\overset{\Delta}{B''}C''\cong A'\overset{\Delta}{B'}C'$ و $A\overset{\Delta}{B}C\sim A\overset{\Delta}{B''}C''$ است؛ پس می توان نتیجه گرفت که $A\overset{\Delta}{B}C\sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$ است.

قضیه: اگر دو ضلع یک مثلث با دو ضلع مثلث دیگر متناسب و زاویهٔ ما بین این دو ضلع با هم انطباق پذیر باشند مثلث‌ها باهم مشابه اند.



اگر $\hat{A} = \hat{A'}$ و $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ باشند.

پس: $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$



مثال: آیا مثلث‌های $O\overset{\Delta}{A}B$ و $O\overset{\Delta}{A'}B'$ متشابه اند؟

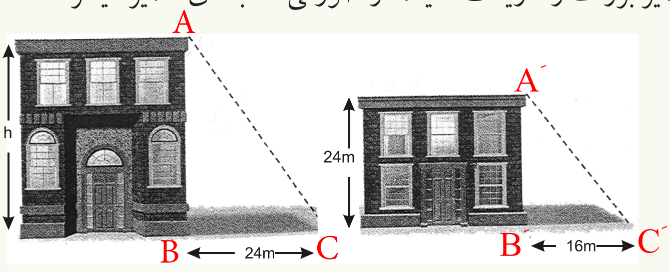
حل: در دو مثلث OAB و $OA'B'$ داریم:

قرار متقابل به رأس: .... $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA'}} = \frac{1}{2}$$

در دو مثلث نسبت اضلاع متناسب و زاویهٔ بین آن‌ها مساوی است در نتیجه $O\overset{\Delta}{A}B \sim O\overset{\Delta}{A'}B'$

مثال: طول سایهٔ یک تعمیر 16m است، در حالی که سایهٔ تعمیر بلندتر از آن 24m است بلندی تعمیر بزرگ را دریافت کنید، در صورتی که بلندی تعمیر دیگر 24m باشد.



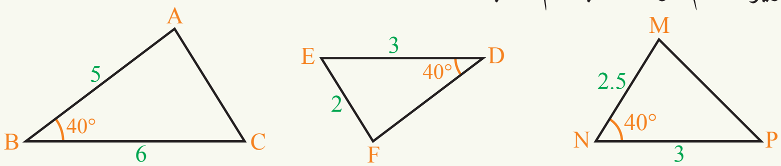
حل: نسبت بین اضلاع مثلث‌های ABC و A′B′C′ می‌توان نوشت:

$$\frac{h}{24m} = \frac{24m}{16m}$$

$$h = \frac{24m \times 24m}{16m} = 36m$$

تمرین

در اشکال زیر کدام دو مثلث با هم مشابه اند؟



حالت سوم



اگر طول انگشـــت مقابل $5cm$ باشد

تصویر آن چه طولی دارد؟

فعالیت

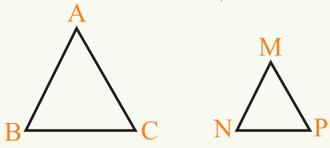
• مثلث ABC را طوری رسم کنید که $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=9$ و $\overline{BC}=12$ باشد، سپس زوایای آن را اندازه کنید.

• مثلث MNP را طوری رسم کنید که: $\overline{MN}=2$, $\overline{MP}=3$, $\overline{NP}=4$ واحد طول بوده؛ سپس زوایای آن را اندازه کنید.

• با در نظر داشت قیمت‌های فوق جدول زیر را تکمیل نمایید:

مثلث	اضلاع	زوایا
$\overset{\Delta}{ABC}$	$\overline{BC}=12, \overline{AC}=9$ و $\overline{AB}=6$	$\hat{A}=?\ ,\ \hat{B}=?\ ,\ \hat{C}=?$
$\overset{\Delta}{MNP}$	$\overline{NP}=4\ ,\ \overline{MP}=3\ ,\ \overline{MN}=2$	$\hat{M}=?\ ,\ \hat{N}=?\ ,\ \hat{P}=?$
نسبت بین اضلاع	$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}}=?\ ,\ \frac{\overline{BC}}{\overline{NP}}=?\ ,\ \frac{\overline{AC}}{\overline{MP}}=?$	

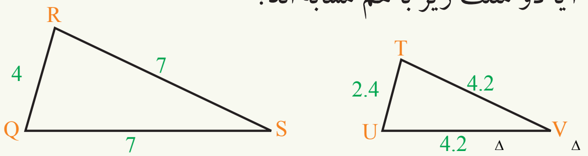
در فعالیت فوق دیدیم که نسبت بین اضلاع مثلث‌ها وجود دارد و هم زوایای دو مثلث با هم مساوی اند، بنا بر آن مثلث $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{MNP}$



قضیه: اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث مشابه‌اند.

مثال: آیا دو مثلث زیر با هم مشابه اند؟

حل:



پس: $\overset{\Delta}{RQS} \sim \overset{\Delta}{TUV}$

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{UT}} = \frac{4}{2.4} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\overline{RS}}{\overline{TV}} = \frac{7}{4.2} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\overline{QS}}{\overline{UV}} = \frac{7}{4.2} = \frac{5}{3}$$

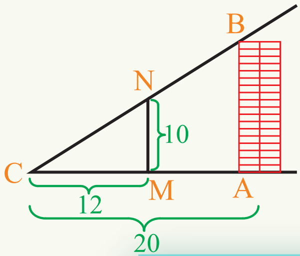
مثال: ارتفاع برج $\overline{AB}$ را به کمک طول سایهٔ آن $\overline{AC}$ تعیین کنید.

حل: برای این منظور میله یی را عمود بر سطح زمین در جایی قرار می‌دهیم که انجام بالایی آن یعنی نقطه N با نقاط B و C روی یک خط مستقیم قرار گیرد چون $\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{CMN}$ است.

پس: $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{MC}}$

در رابطهٔ بالا طول قطعه خط‌های MC، MN و AC معلوم اند؛ پس به کمک رابطهٔ بالا طول AB را که ارتفاع برج است می‌توان طورزیر حساب کرد:

در مثلث‌های مشابه CAB⊔CMN داریم:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{MC}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{10} = \frac{20}{12}$$

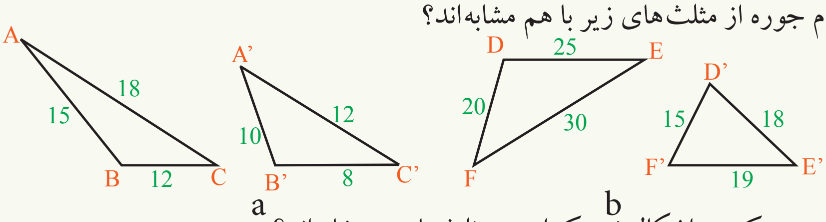
$$12\overline{AB} = 20 \cdot 10$$

$$\overline{AB} = \frac{200}{12}$$

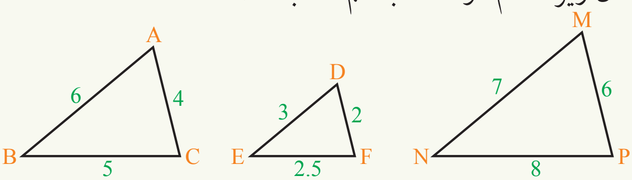
$$\overline{AB} = 16.6$$

تمرین

1- کدام جوره از مثلث‌های زیر با هم مشابه‌اند؟



2- نشان دهید که در اشکال زیر کدام دو مثلث با هم متشابه‌اند؟



نکات مهم فصل سوم

1- اشکال متشابه عبارت از اشکالی اند که هم شکل بوده؛ اما ضروری نیست که اندازه‌های‌شان باهم مساوی باشند.

2- مضلعات وقتی با هم متشابه اند که دارای خواص زیر باشند:

a) تمام زوایای مضلعات مشابه باید یک به یک با هم انطباق پذیر باشند.

b) اضلاع مقابل زاویه‌های مساوی با هم متناسب باشند.

3- هرگاه خطوط موازی به فاصله‌های مساوی و خط قاطع بالای آن‌ها را در نظر بگیریم در این صورت یک قطعه خط، را به قطعات مساوی تقسیم کرده می‌توانیم.

4- با استفاده از خطوط موازی با فاصله مساوی،یک قطعه خط را به قطعات مساوی تقسیم کرده می‌توانیم.

5- اگر فاصله بین چند خط موازی مساوی باشند و توسط یک خط مستقیم قاطع قطع گردند روی خط قاطع قطعات مساوی را جدا می کنند.

6- هرگاه یک خط موازی به یک ضلع مثلث رسم شود دو ضلع دیگر مثلث را به گونهٔ متناسب تقسیم می کند.

7- هرگاه یک خط از یک نقطه روی یکی از اضلاع مثلث به ضلع دیگر مثلث موازی رسم شود ضلع را به گونهٔ متناسب تقسیم می کند.

8- دو مثلث را وقتی متشابه می گوییم که تمام زوایای آن‌ها یک به یک انطباق پذیر و اضلاع شان باهم متناسب باشند، یعنی اگر یکی از دو خواص آن در مثلث‌ها صدق کند مثلث‌ها متشابه اند.

9- مثلث‌ها در سه حالت باهم مشابه اند:

a) **حالت اول:** هرگاه دو زاویهٔ یک مثلث با دو زاویهٔ مثلث دیگر مساوی باشند.

b) **حالت دوم:** هرگاه دو ضلع یک مثلث با دوضلع مثلث دیگر متناسب و زاویهٔ مابین شان مساوی باشند.

c) **حالت سوم:** هرگاه سه ضلع یک مثلث باسه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند.

تمرین عمومی

• سؤال‌های زیر را به دقت مطالعه کنید. برای هر سؤال چهار جواب داده شده است، جواب درست را انتخاب نموده و دور آن را حلقه کنید.

1- یک مثلث متساوی الاضلاع مشابه است با:

a) مثلث مختلف الاضلاع		b) مثلث متساوی الاضلاع

c) مثلث متساوی الساقین		d) هیچکدام

2- تمام چهار ضلعی‌های متساوی الزوایا باهم:

a) مشابه اند		b) انطباق پذیراند		c) متوازی الاضلاع اند		d) هیچکدام

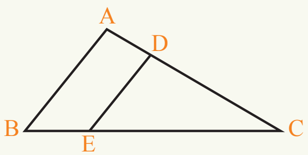
3- مثلث‌های ABC و DEF باهم مشابه اند. هر گاه $\hat{A}=\hat{D}, \hat{B}=\hat{E}$ بوده و $\overline{AC}=12cm$ ، $\overline{AB}=9cm$ و $\overline{DE}=3cm$ باشد، در این صورت طول $\overline{DF}$ عبارت است از:

a) 3cm		b) 4cm

c) 6 cm		d) 7cm

4- درشکل زیر $\overline{ED}\,||\,\overline{AB}$ و $\frac{5}{2}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$ است نسبت $\frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}$ عبارت است از:

a) $\frac{1}{3}$		b) $\frac{5}{2}$		c) $\frac{4}{5}$		d) $\frac{1}{2}$



5- یک مثلث ABC که اندازهٔ ضلع‌های آن‌ها 8، 12و 16 سانتی متر باشند با کدام یک از مثلث‌هایی زیر که اندازه ضلع‌های آن‌ها داده شده اند متشابه اند؟

a) مثلثی که ضلع‌های آن 6 ، 9 و 12 سانتی متر باشد.

b) مثلثی که ضلع‌های آن 12 ، 8 و 6 سانتی متر باشد.

c) مثلثی که ضلع‌های آن 8 ، 9 و 12 سانتی متر باشد.

d) مثلثی که ضلع‌های آن 16 ، 10و 12 سانتی متر باشد.

• جملات زیر را به دقت خوانده در مقابل جملهٔ صحیح حرف(ص) و در مقابل جملهٔ غلط حرف (غ) بنویسید.

1- (   ) دو مثلث قایم‌الزاویه در صورتی با هم مشابه اند که طول وترهای شان مساوی باشند.

2- (   ) تمام مستطیل‌ها باهم مشابه اند.

3 -(   ) اگر دوضلع و زاویهٔ مابین یک مثلث با دو ضلع و زاویهٔ مابین مثلث دیگر انطباق پذیر باشند. مثلث‌های مذکور باهم مشابه اند.

4- (   ) اگر سه ضلع یک مثلث با سه ضلع مثلث دیگر متناسب باشند، مثلث‌های مذکور مشابه اند.

5- (   ) تمام مثلث‌های مشابه انطباق پذیر اند.

6- (   ) تمام مثلث‌های قایم‌الزاویه با هم مشابه اند.

7- (   ) هرگاه یک خط به یک ضلع مثلث موازی باشد با دو ضلع دیگر آن نیز مساوی است.

• جملات زیر را به دقت خوانده جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

1- اگر یک خط دوضلع یک مثلث را متناسب تقسیم نماید به ضلع سوم آن...................... است.

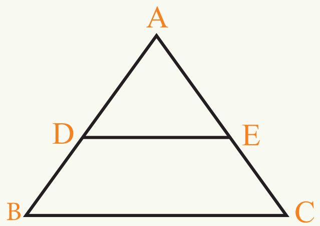
2- هرگاه خطوط موازی هم فاصله، قاطع‌ها را قطع کنند، بر روی آن‌ها................ جدا می کنند.

3- دومثلث وقتی باهم مشابه اند که............................ یک مثلث با........................دیگر انطباق پذیر باشد.

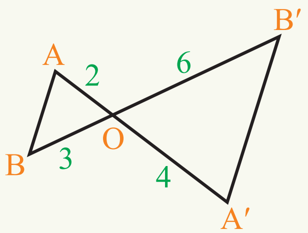
4- مضلعات مشابه دارای اضلاع............ و زوایای.............. می‌باشند.

• سؤال‌های زیر را حل کنید.

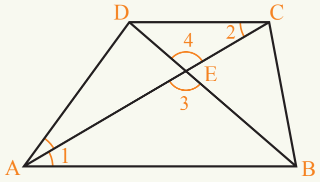
1- در شکل زیر نقطهٔ D وسط AB است. نسبت $\frac{\overline{\overline{AE}}}{\overline{\overline{AC}}} = \frac{\overline{\overline{AD}}}{\overline{\overline{DB}}}$ را دریافت کنید.



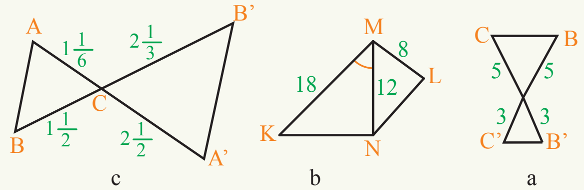
2-چرا دو مثلث OAB , $O'A'B'$ مشابه اند؟ تناسب بین اضلاع آن‌ها را نوشته و زاویه‌های مساوی را مشخص کنید.



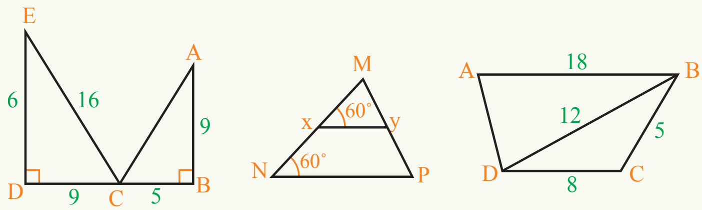
3- در ذوزنقه زیر ثبوت کنید که $\overset{\Delta}{ABE}$ با $\overset{\Delta}{ECD}$ مشابه اند.



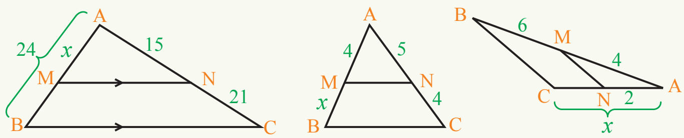
4- در هر شکل، مثلث‌ها را بررسی و تعیین کنید که کدام دو جوره مثلث‌ها و طبق کدام حالت تشابه باهم مشابه اند؟



5- به مثلث‌های زیر فکر کرده و بگویید کدام دوجورهٔ آن‌ها با هم مشابه اند؟



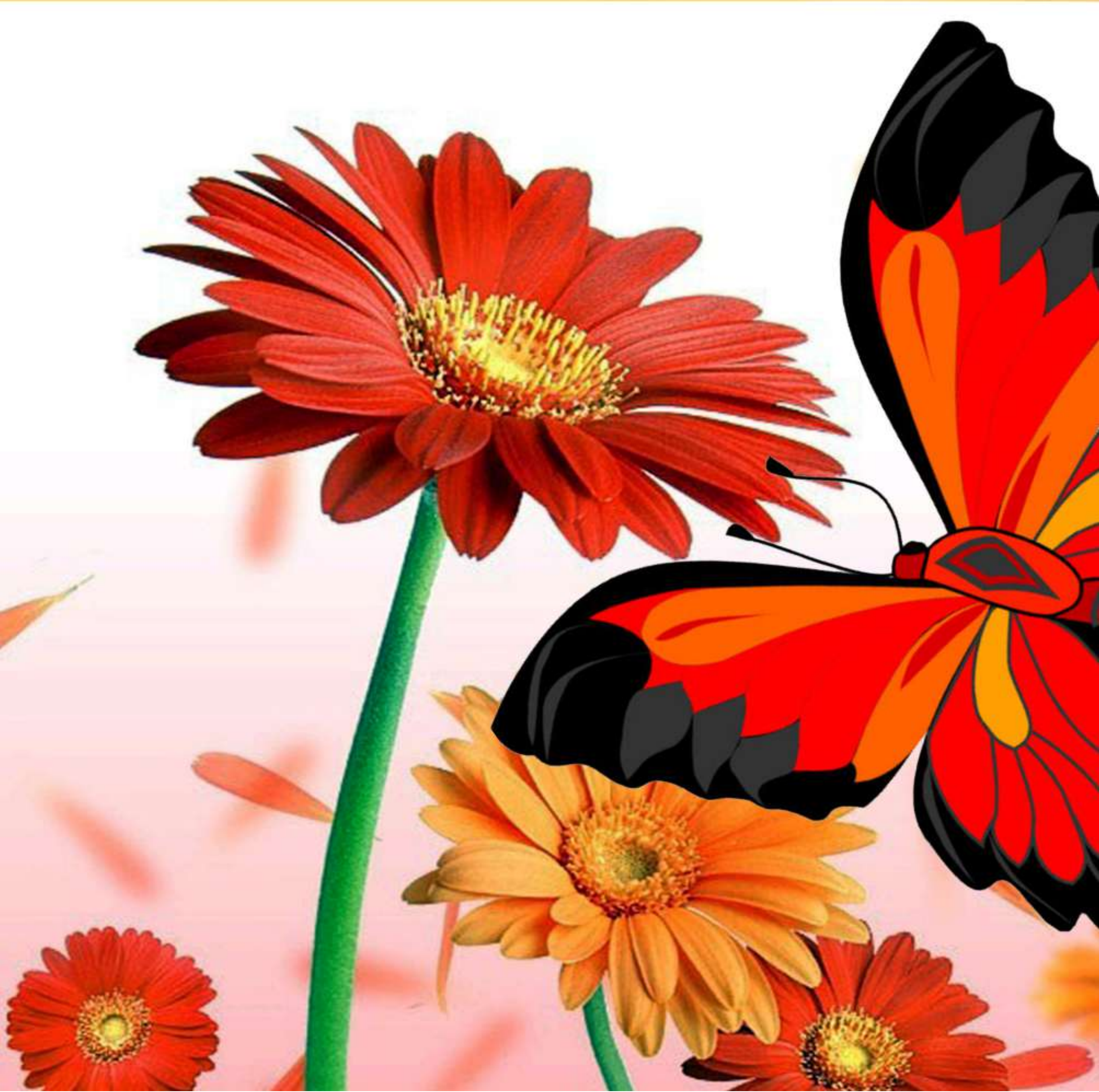
6- در اشکال زیر $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ است. با استفاده از قضیهٔ تالس x را دریافت کنید.



فصل چهارم

تناظر





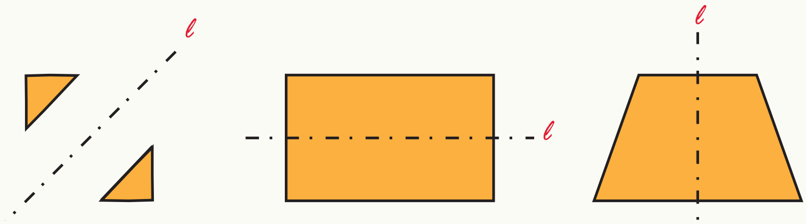
مفهوم تناظر



آیا تا به حال فکر کرده‌اید که اشکال متناظر چقدر در اطراف ما و در طبیعت وجود دارند؟

فعالیت

به شکل‌های زیر توجه کنید:



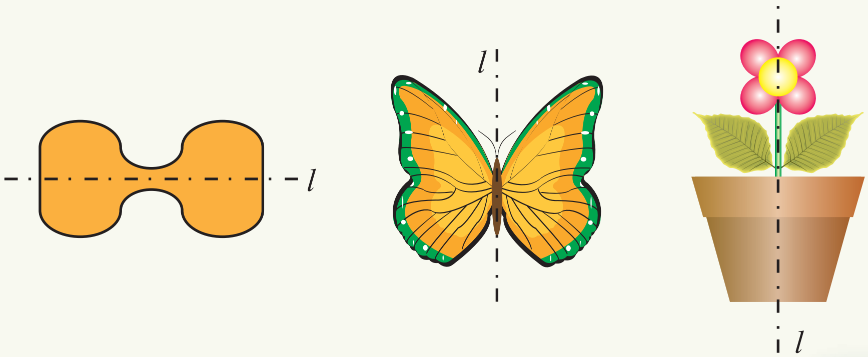
• اگر شکل‌های فوق را در امتداد خط ℓ قات کنیم چی مشاهده می‌شود؟
• آیا می‌توان گفت که دو قسمت شکل که در دو طرف خط ℓ قرار می گیرند انطباق پذیر هستند؟
• آیا می‌توان روی شکل های فوق خط دیگری رسم کرد که اگر روی آن، شکل را قات کنیم یکی بالای دیگری منطبق شود؟

از فعالیت فوق مشاهده شده که بعضی از شکل ها دارای این خاصیت هستند که اگر آن‌ها را در امتداد یک خط مستقیم قات کنیم دو قسمت شکل باهمدیگر منطبق می‌شوند.
در این حالت می گوییم شکل نسبت به خط، متناظر است.

اگر با قات کردن یک شکل به امتدادیک خط، دو قسمت آن شکل بر همدیگر منطبق شوند آن شکل را نسبت به خط مستقیم متناظر گویند و خطی که روی آن، شکل قات شده است،

محور تناظر نامیده می‌شود.

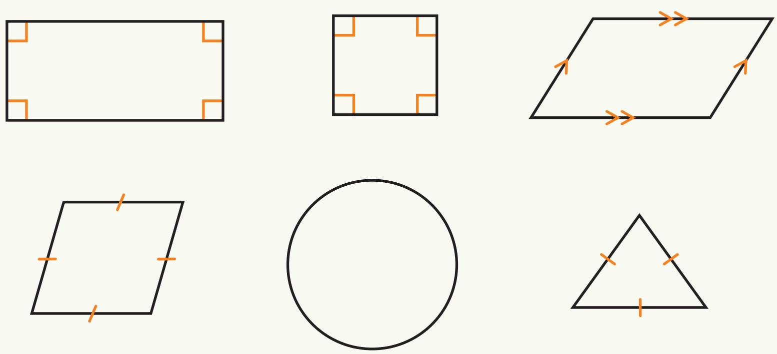
مثال: شکل‌های زیر نسبت به خط l (محور تناظر) متناظر هستند:



تمرین

محور تناظر هر یک از شکل‌های زیر را در صورت موجودیت رسم کنید و بگویید که هر کدام از این شکل‌ها چند محور تناظر دارند و نیز جدول زیر را تکمیل کنید.

شکل	مستطیل	مربع	متوازی الاضلاع	لوزی	دایره	مثلث های متساوی الاضلاع
تعداد محور های تناظر						

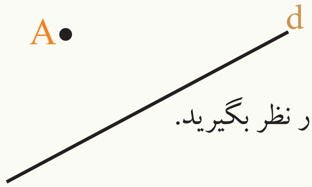


تناظر محوری



بسیاری از موجودات در طبیعت متناظر هستند، آیا می توانید نمونه های از اشکال متناظر را در طبیعت نام ببرید؟

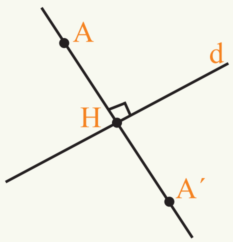
فعالیت



خط مستقیم d و نقطهٔ A را خارج آن مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید.

- از نقطهٔ A خط عمودی بالای خط d رسم کنید.
- نقطهٔ تقاطع آن را H نام گذاری کنید.
- AH را به اندازهٔ خودش امتداد دهید. تا نقطهٔ A' به دست آید.
- آیا $\overline{AH} = \overline{A'H}$ است. چرا؟
- آیا $A'H \perp d$ است. چرا؟
- آیا می توان نتیجه گرفت که d ناصف عمودی AA' است؟

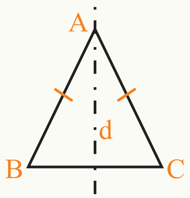
تعریف



نقطهٔ A' را متناظر نقطهٔ A نسبت به خط d می نامیم؛ اگر خط d ناصف عمودی قطعه خط واصل بین A و A' باشد؛ مانند شکل مقابل.

تناظر محوری هر شکل هندسی، شکلی است که هر نقطهٔ آن نظر به یک نقطهٔ شکل اولی متناظر می‌باشد.

فعالیت

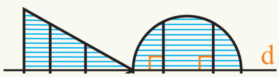


در مثلث متساوی الساقین ABC خط d ناصف عمودی قاعدهٔ BC است.

- اگر مثلث را روی خط d قات کنیم آیا دو قسمت مثلث بر همدیگر منطبق می‌شوند؟
- یک نقطه مانند P روی ضلع $\overline{AB}$ انتخاب کنید.
- از نقطهٔ P بالای خط d عمود رسم کنید و انجام آن را H نام‌گذاری کنید. آن را امتداد دهید تا $\overline{AC}$ را در P' قطع کند.
- آیا می‌توان نتیجه گرفت که $\overline{PH} = \overline{P'H}$ است؟ چرا؟
- آیا می‌توان نتیجه گرفت که خط d ناصف عمودی $\overline{PP'}$ است؟ چرا؟
- نقطهٔ مانند Q را روی ضلع $\overline{AC}$ انتخاب کنید. و مراحل فوق را تکرار کنید.

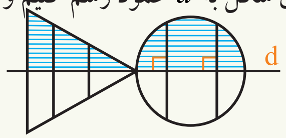
از فعالیت فوق نتیجه می‌گیریم که متناظر هر نقطهٔ ضلع AB نظر به محور تناظر d بالای ضلع AC قرار دارد.

اگر یک شکل نسبت به یک خط متناظر باشد، محور تناظر آن شکل، ناصف عمودی قطعه خط های واصل نقاط متناظر روی شکل است.



مثال: متناظر شکل داده شده را نسبت به خط d به دست آورید.

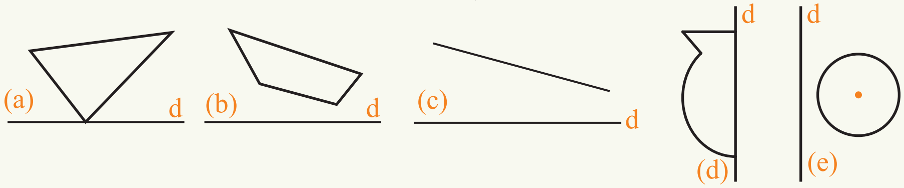
حل: با در نظر داشت این که محور تناظر ناصف عمودی قطعه خط‌های واصل بین نقاط متناظر است؛ پس کافی است از هر نقطهٔ روی شکل به d عمود رسم کنیم و به اندازهٔ خودش امتداد دهیم.



از وصل کردن نقاط به دست آمده متناظر، شکل به دست می‌آید.

تمرین

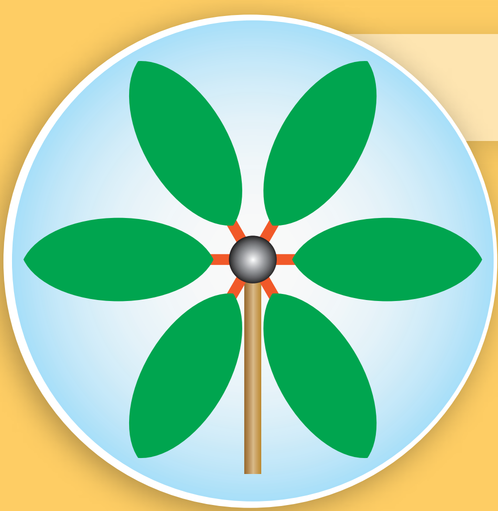
1- متناظر هر شکل را نسبت به خط d رسم کنید.

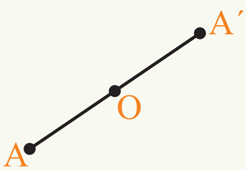


2- نشان دهید تناظر محوری یک زاویه یی زاویهٔ است مساوی و مختلف الجهت با زاویه اولی.

تناظر مرکزی

آیـا تناظر در چرخک را مشــاهده می‌نمایید؟

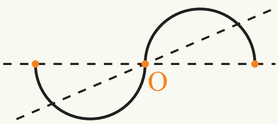


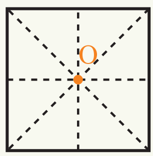


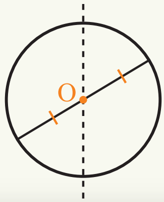
نقطهٔ A' را متناظر نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ O می‌نامیم، اگر نقطهٔ O وسط قطعه خط AA' باشد. در این حالت نقطهٔ O را مرکز تناظر نامیده و می‌گوییم نقاط A و A' نسبت به نقطهٔ O متناظر اند.

همچنین اگر S یک ست نقاط و O یک نقطه باشد و هم متناظر هر نقطهٔ S نظر به O روی S باشد، می‌گوییم S نظر به نقطهٔ O متناظر است، در این حالت O مرکز تناظر S است و S تناظر مرکزی دارد.

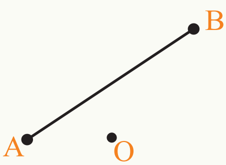
مثال: شکل‌های زیر نسبت به نقطهٔ O متناظر هستند:







فعالیت



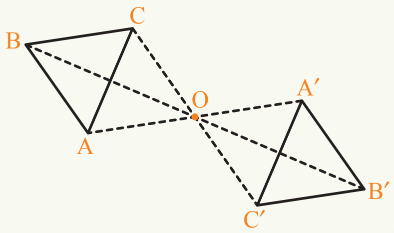
قطعه خط AB و نقطهٔ O را مطابق شکل در نظر بگیرید.

- نقطهٔ A را به O وصل کنید و به اندازهٔ خودش امتداد دهید. انجام آن را A' بنامید.
- آیا نقطهٔ A' متناظر نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ O است؟
- نقطهٔ B را به نقطهٔ O وصل کنید و به اندازهٔ خودش امتداد دهید. انجام آن را B' بنامید.
- آیا نقطهٔ B' متناظر نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ O است؟

- نقاط A' و B' را توسط خط کش با هم وصل کنید.
- نقطهٔ دلخواه P را روی قطعه خط AB انتخاب کنید.
- نقطهٔ P را به نقطه O وصل نموده به اندازهٔ خودش امتداد دهید. انجام آن را P' نام گذاری کنید.
- آیا نقطه P' روی قطعه خط $A'B'$ قرار می گیرد؟
- آیا قطعه خط $A'B'$ متناظر قطعه خط AB نسبت به نقطهٔ O است؟

برای دریافت متناظر یک شکل نسبت به یک نقطهٔ O کافی است هر نقطهٔ شکل را به نقطه O وصل نموده و به اندازهٔ خودش امتداد دهیم.

از وصل کردن نقاط حاصله باهم متناظر شکل نظر به نقطه O به دست می آید.

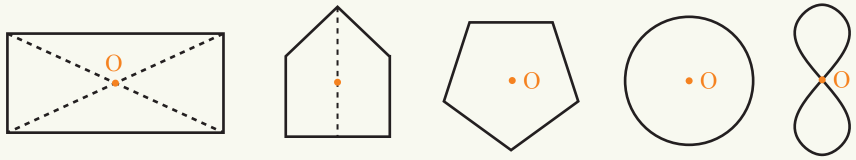


مثال: در شکل مقابل مثلث $A'B'C'$ متناظر مثلث ABC نظر به نقطهٔ O است.

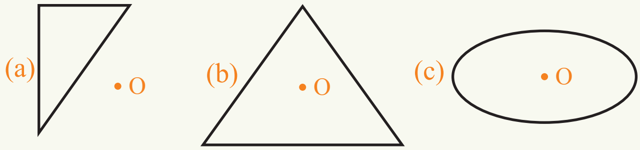
سؤال: متناظر زاویهٔ ABC را نظر به نقطهٔ O به دست آورید؟

تمرین

1- درکدام یک از شکل‌های زیر نقطهٔ O مرکز تناظر است؟



2- متناظر شکل‌های زیر را نسبت به نقطهٔ O رسم کنید:



نکات مهم فصل چهارم

• مفهوم تناظر و محور تناظر

اگر با قات کردن یک شکل در امتداد یک خط دو قسمت شکل با همدیگر منطبق شوند آن شکل را نسبت به خط مستقیم متناظر گویند و آن خطی که روی آن شکل قات شده است محور تناظر شکل نامیده می‌شود.

• تناظر محوری

نقطهٔ A' را متناظر نقطهٔ A نسبت به خط مستقیم d می‌نامیم؛ اگر خط مستقیم d ناصف عمودی قطعه خط واصل بین نقاط A و A' باشد.

• اگر نقطهٔ A روی خط d باشد، متناظر آن نسبت به خط d خود آن نقطه است.

• اگر شکلی نسبت به یک خط متناظر باشد، محور تناظر آن شکل ناصف عمودی قطعه خط‌های واصل بین نقاط متناظر روی شکل است.

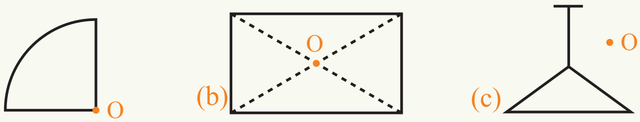
• تناظر مرکزی

اگر S یک مجموعهٔ نقاط و O یک نقطه باشد، اگر متناظر هر نقطهٔ S نظر به نقطه O باز هم روی S باشد، می‌گوییم مجموعهٔ نقاط S نظر به نقطهٔ O متناظر است، در این حالت نقطهٔ O مرکز تناظر S است و S تناظر مرکزی دارد.

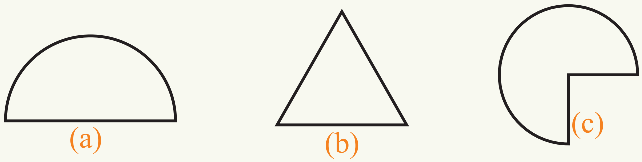
تمرین عمومی

سؤال‌های زیر را حل کنید:

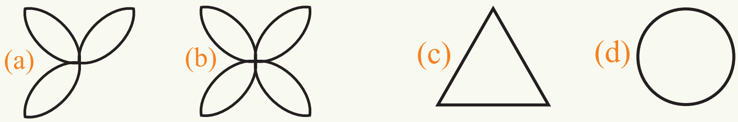
1– متناظر هر شکل را نظر به نقطهٔ O رسم کنید.



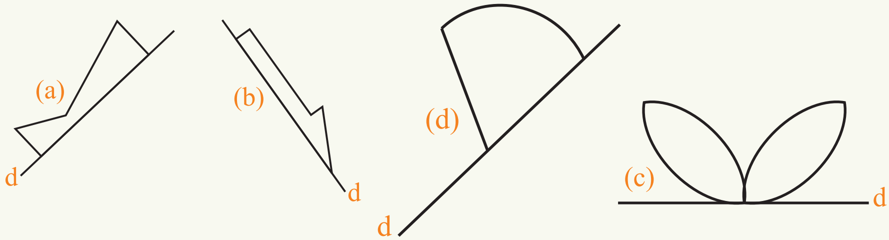
2– محور تناظر هر شکل را رسم کنید:



3– شکل‌هایی را که مرکز تناظر دارند مشخص کنید، سپس مرکز تناظر را روی هر شکل نشان دهید:



4– متناظر هر شکل را نظر به خط d دریافت کنید:



5– با دو شکل نشان دهید که اگر شکلی دو محور تناظر داشته باشد، محل تقاطع آن‌ها مرکز تناظر شکل است.

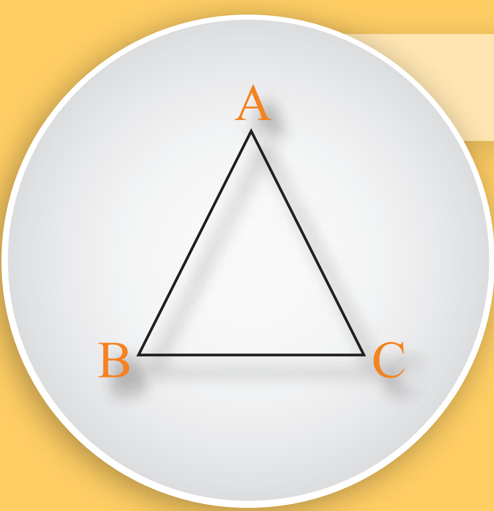
فصل پنجم

قضایای مثلث





قضایای مثلث متساوی الساقین



اضلاع مثلث ABC را اندازه بگیرید.
این مثلث چه نوع مثلث است؟
چه رابطهٔ بین اندازهٔ زاویه‌های این مثلث وجود دارد؟

فعالیت

- مثلث ABC را طوری رسم کنید که در آن $\overline{AC} = \overline{AB}$ باشد.
- در مثلث ABC اضلاع مساوی چه نامیده می‌شوند؟

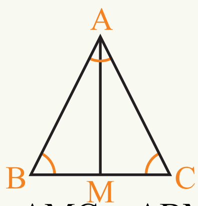
زاویه‌های مقابل اضلاع مساوی را به کمک نقاله اندازه گیری نموده چه رابطهٔ بین این دو زاویه می‌بینید.

- مثلث ABC به نام چه یاد می‌شود؟
- یک مثلث متساوی الساقین دیگر رسم کنید. عملیهٔ فوق را تکرار نموده چه نتیجه می گیرید؟

از فعالیت فوق مشاهده می‌شود که در مثلث‌های متساوی الساقین زاویه‌های مقابل ساق ها با هم مساوی اند. این مطلب را در قضیهٔ زیر می‌توان بیان نمود:

قضیه: اگر دو ضلع یک مثلث باهم مساوی باشند. زوایای مقابل آن دو ضلع نیز با هم مساوی‌اند.

ثبوت: در مثلث ABC فرض می کنیم $\overline{AC} = \overline{AB}$ است. نقطهٔ وسط ضلع BC را M نامگذاری نموده میانهٔ AM را رسم می کنیم.



در دو مثلث ABM و ACM داریم:

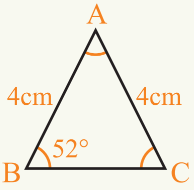
$\overline{AB} = \overline{AC}$ قرار فرضیه
$\overline{BM} = \overline{CM}$ (M نقطهٔ وسطی BC)
$\overline{AM} = \overline{AM}$ مشترک

$\Rightarrow \overset{\Delta}{ABM} = \overset{\Delta}{AMC}$

با در نظر داشت تساوی سه ضلع، به این نتیجه می‌رسیم که مثلث‌های ABM و AMC انطباق پذیراند؛ بنا براین همهٔ زوایای آن‌ها نیز یک به یک با هم مساوی می‌باشند.

در نتیجه: $\hat{B} = \hat{C}$

مثال 1: در مثلث ABC اگر $\overline{AB} = \overline{AC} = 4cm$ و $\hat{B} = 52^\circ$ باشند، زاویهٔ $\hat{C}$ چند درجه است؟



حل: چون $\overline{AB} = \overline{AC}$ است، در مقابل اضلاع مساوی زوایای مساوی قرار دارد، در نتیجه $\hat{B} = \hat{C}$

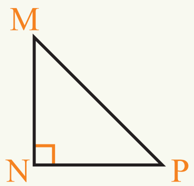
پس: $\hat{C} = 52^\circ$

مثال 2: در مثلث قایم الزاویهٔ متساوی الساقین زوایای مقابل دو ساق چند درجه است؟

حل: در مثلث MNP ، زاویهٔ N قایمه است.

چون $\overline{MN} = \overline{NP}$ است. با در نظر داشت قضیهٔ فوق دو زاویهٔ مقابل آن‌ها باهم مساوی‌اند،

یعنی: $\hat{M} = \hat{P}$



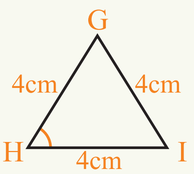
چون مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است و $\hat{N} = 90^\circ$

در نتیجه:

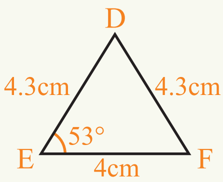
$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}+\hat{P}=90^\circ \\ \hat{M}=\hat{P}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}=\hat{P}=90^\circ \div 2 = 45^\circ$$

تمرین

1- در شکل‌های زیر زوایای نا معلوم را دریافت کنید.

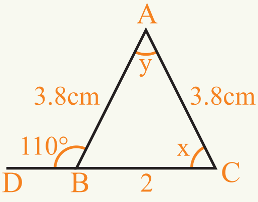


$\hat{H} = ? , \hat{I} = ? , \hat{G} = ?$



$\hat{F} = ?$

2- در شکل زیر $A\overset{\Delta}{B}C$ متساوی الساقین است اگر $D\hat{B}A = 110^\circ$ باشد زوایای x و y را دریافت کنید.



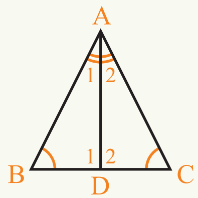
فعالیت

- مثلث ABC را طوری رسم کنید که در آن $\hat{B}=\hat{C}$ باشد.
- طول اضلاع مثلث ABC را با استفاده از خط کش اندازه‌گیری کنید.
- چه رابطهٔ بین طول اضلاع این مثلث مشاهده می شود؟
- مثلث دیگری با دو زاویهٔ مساوی رسم نموده اعمال فوق را تکرار کنید.

از فعالیت فوق مشاهده می‌شود، در مثلث هایی که دو زاویهٔ مساوی دارند. اضلاع مقابل زوایای مساوی با هم مساوی‌اند. این مطلب را به شکل قضیهٔ زیر، بیان می‌نماییم:

قضیه: اگر دو زاویه یک مثلث باهم مساوی باشند، اضلاع مقابل زوایای مذکور باهم مساوی هستند.

ثبوت: در مثلث ABC فرض می کنیم $\hat{B}=\hat{C}$ است ناصف الزاویه $\hat{A}$ را رسم نموده آن را DA می‌نامیم.



در دو مثلث ABD و ACD داریم:

$$\left.\begin{matrix}\hat{A}_1=\hat{A}_2\\ \hat{B}=\hat{C}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \hat{D}_1=\hat{D}_2=90^\circ$$ (چرا)؟

حال در دو مثلث ABD و ACD داریم:

$$\left.\begin{matrix}\hat{A}_1=\hat{A}_2 \text{، ناصف الزاویه } AD\\ \hat{D}_1=\hat{D}_2 \text{ زوایای قایمه اند}\\ \overline{AD}=\overline{AD} \text{، ضلع مشترک}\end{matrix}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{ACD}$$

با در نظر داشت تساوی دو زاویه و ضلع بین آن‌ها، مثلث‌های ABD و ACD انطباق پذیراند؛ بنابر این اضلاع مقابل آن‌ها نیز مساوی هستند.

$$\overline{AB}=\overline{AC}$$

مثال: در شکل زیر $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$، $\overline{AB} = 2.9cm$ است ضلع AC را معلوم کنید.

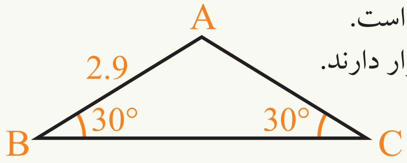
حل:

چون: $\hat{B} = \hat{C}$ است، پس مثلث متساوی الساقین است.

در نتیجه، مقابل زوایای مساوی، اضلاع مساوی قرار دارند.

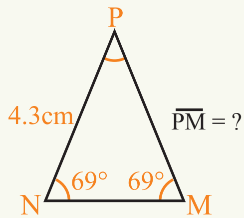
بنابراین:

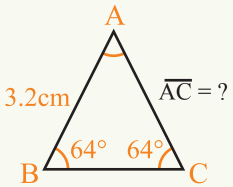
$$\overline{AB} = \overline{AC} = 2.9cm$$



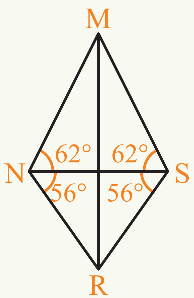
تمرین

1- در شکل‌های زیر اضلاع نا معلوم را دریافت کنید.





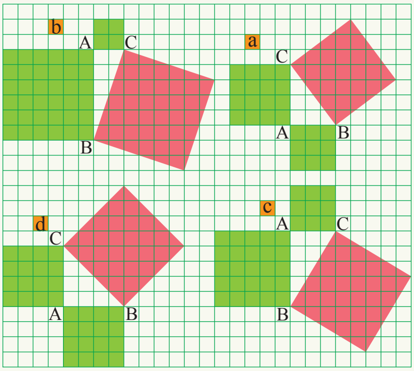
2- با توجه به اندازهٔ زاویه ها درشکل زیر نشان دهید که دو مثلث MNR و MSR انطباق پذیر اند.



قضیهٔ فیثاغورث
Pythagorean theorem



فیثاغــورث ریاضــی‌دان مشــهور و فیلســوف یونان باســتان بود، که در سال 530 قبل از میلاد می‌زیست.

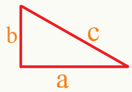


در شکل‌های فوق مشاهده می‌شود که مثلث‌های ABC در رأس A قایم‌الزاویه‌اند. مساحت مربع‌ها که توسط اضلاع مثلث ABC تشکیل شده‌اند. با شمارش تعداد مربع‌های کوچک اندازهٔ مساحت آن‌ها را تخمین کنید. مانند نمونهٔ که در جدول زیردرج است جزء c, b و d را تکمیل کنید.

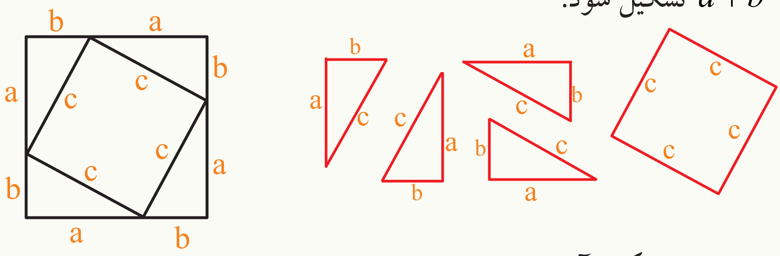
	تعداد مربع هایی که بالای ضلع AB قرار دارد	تعداد مربع هایی که بالای ضلع AC قرار دارد	مجموع مربع هایی که در ضلع AB و AC قرار دارد	تعداد مربع هایی که روی وتر BC قرار دارد
a	9	16	25	25
b				40
c				34
d				32

با توجه به اعداد مندرج در جدول چه رابطه بین مساحت مربع‌ها تشکیل شده توسط اضلاع مثلث‌های قایم‌الزاویه مشاهده می‌کنید؟

فعالیت



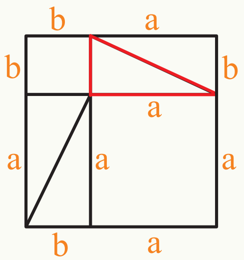
- مثلث قایم الزاویه به طول ضلع‌های b,a و c مانند شکل مقابل روی کاغذ رسم و آن را قیچی کنید.
- سه مثلث انطباق پذیر با این مثلث از کاغذ تهیه کنید.
- یک مربع به طول وتر c با کاغذ تهیه کنید.
- مطابق شکل زیر چهار مثلث و مربع تهیه شده را طوری کنار هم بگذارید که مربعی به طول ضلع $a+b$ تشکیل شود.



با در نظر داشت شکل، آیا تساوی زیر درست است؟

مساحت مربع به ضلع c + مساحت 4 مثلث قایم الزاویهٔ انطباق پذیر = مساحت مربع به ضلع $(a+b)$

- به طور مجدد چهار مثلث قایم‌الزاویهٔ انطباق پذیر به طول اضلاع a و b دو مربع به طول ضلع‌های زاویهٔ قایمه این مثلث ها یعنی a و b تهیه کنید.
- این چهار مثلث و دو مربع را مانند شکل مقابل طوری کنار هم قرار دهید، تا مربع بزرگتر به طول ضلع $(a+b)$ ساخته شود.



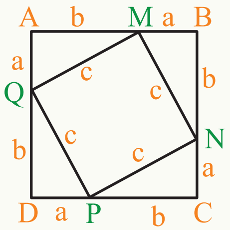
با در نظر داشت شکل بالا آیا تساوی زیر درست است.

مساحت مربع به ضلع b + مساحت مربع به ضلع a + مساحت 4 مثلث قایم الزاویه انطباق پذیر = مساحت مربع به ضلع $a+b$

با در نظر داشت تساوی مساحت مربع‌های به طول ضلع $a+b$ قرار شکل فوق، اگر 4 مثلث انطباق پذیر را از دو شکل فوق برداریم، باقی مانده مساحت آن‌ها نیز باید با هم برابر باشند.
بنابر آن می‌توان گفت: $c^2=a^2+b^2$ این رابطه اولین بار توسط فیثاغورث به اثبات رسیده است.

قضیه: در هر مثلث قایم الزاویه مساحت مربعی که توسط اندازه وتر ساخته می‌شود برابر مجموع مساحت‌های دو مربعی است که توسط اندازه اضلاع زاویهٔ قایمه آن مثلث ساخته می‌شود.

فعالیت



در شکل مقابل مربعی به ضلع $a+b$ داریم:

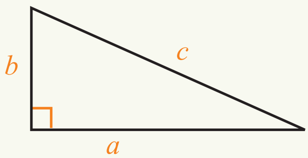
- آیا چهار ضلعی MNPQ یک مربع است؟ توضیح دهید.
- مساحت مربع ABCD را یک بار به طور مستقیم با استفاده از طول ضلع آن، یعنی $a+b$ محاسبه کنید.
- مساحت مربع ABCD را از مجموع مساحت‌های چهار مثلث انطباق پذیر $\overset{\Delta}{AMQ}$، $\overset{\Delta}{MNB}$، $\overset{\Delta}{NCP}$، $\overset{\Delta}{DPQ}$ و مربع MNPQ محاسبه کنید.

از مقایسهٔ رابطه‌های به دست آمده در دو بخش اخیر چه نتیجه می گیرید؟

فعالیت فوق به عنوان قضیهٔ فیثاغورث معروف است.

قضیهٔ فیثاغورث:

در هر مثلث قایم الزاویه مربع وتر مساوی با مجموع مربع‌های اضلاع قایم آن می‌باشد: $a^2+b^2=c^2$



ثبوت: با در نظر داشت شکل بالا می‌توان نوشت: نظر به خاصیت توزیع پذیری ضرب بالای جمع می توان نوشت:

$$S_{(ABCD)}=(a+b)(a+b)$$
$$=a(a+b)+b(a+b)$$
$$=a^2+ab+ba+b^2$$
$$=a^2+2ab+b^2..............1$$

از طرف دیگر چون:

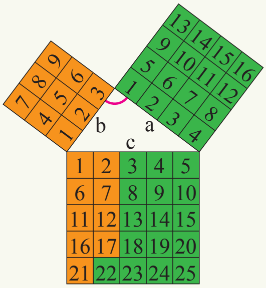
$$S_{(ABCD)}=4S_{(\overset{\Delta}{AMQ})}+S_{(MNPQ)}$$
$$=4(\frac{1}{2}ab)+c^2...........II$$

از تساوی روابط I و II نتیجه می‌شود:

$$a^2+b^2+2ab=4(\frac{1}{2}ab)+c^2$$
$$\Rightarrow\ a^2+b^2+2ab=2ab+c^2$$
$$\Rightarrow\ \boxed{a^2+b^2=c^2}$$

مثال 1: طول اضلاع یک مثلث به ترتیب زیر داده شده‌اند:

$a=4\text{cm}$ ،$b=3cm$ ،$c=5cm$



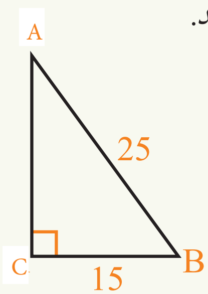
حل: در شکل دیده می‌شود که بالای ضلع قایم (a)، 16عدد مربع که هر ضلع آن $1cm$ است، می‌باشد.
بالای ضلع قایم (b)، 9 عدد مربع که هر ضلع آن مساوی به $1cm$ است، می‌باشد و بالای ضلع (c)، 25 عدد مربع که هر ضلع آن نیزمساوی $1cm$ است، می‌باشد.

در نتیجه:

$$25cm^2 = 16cm^2 + 9cm^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

مثال 2: در مثلث قایم الزاویهٔ ABC اندازهٔ ضلع AC را حساب کنید.



حل:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$$

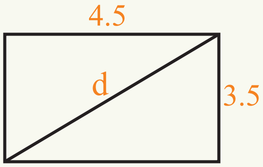
$$(25)^2 = \overline{AC}^2 + (15)^2$$

$$625 = \overline{AC}^2 + 225$$

$$\overline{AC}^2 = 625 - 225$$

$$\overline{AC}^2 = 400\ ,\ \ \overline{AC} = 20\,\text{cm}$$

مثال 3: طول قطر مستطیلی را با داشتن اضلاع $3.5cm$ و $4.5cm$ دریافت کنید.



حل: طبق قضیهٔ فیثاغورث اگر طول قطر را d بنامیم؛ داریم:

$$d^2 = (4.5\text{cm})^2 + (3.5\text{cm})^2$$

$$d^2 = 20.25\text{cm}^2 + 12.25\text{cm}^2$$

$$d^2 = 32.50\text{cm}^2$$

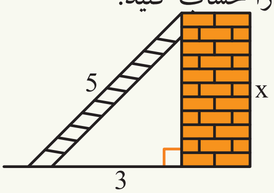
$$\Rightarrow d = \sqrt{32.50}\text{cm}\ \ ,\ d \approx 5.7\text{cm}$$

تمرین

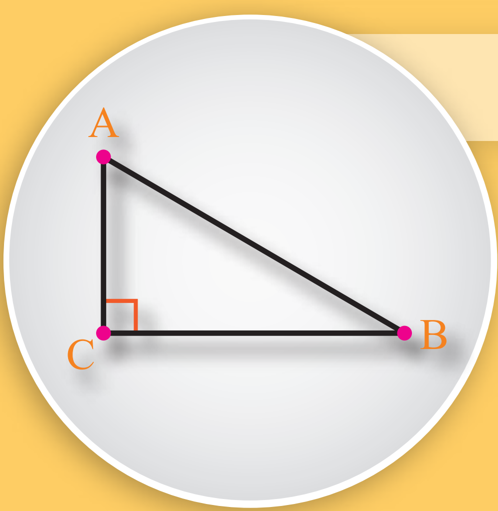
1- طول و عرض صنف خود را به متر اندازه کنید. فاصله بین دو کنج مقابل را اول با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث، بعد ذریعهٔ متر محاسبه و نتایج را مقایسه کنید.

2- اگر طول یک ضلع مربع 4 واحد باشد قطر آن را محاسبه کنید.

3- در مثلث قایم الزاویهٔ ABC، $\overline{BC} = 6$، $\overline{AB} = 8$ وتر $\overline{AC}$ را حساب کنید.



4- در شکل مقابل زینه با زمین و دیوار مثلث قایم الزاویه را تشکیل نموده است اگر طول زینه 5m و طول یک ضلع قایم آن 3m باشد. طول ضلع سوم آن. یعنی x را دریافت کنید.



معکوس قضیهٔ فیثاغورث
Pythagorean

در کدام حالت سه قطعه خط کیفی یک مثلث قایم‌الزاویه را ساخته می‌تواند؟

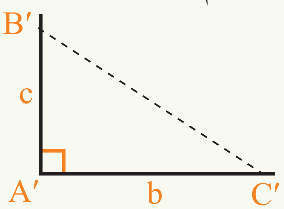
فعالیت

- مثلثی را به طول اضلاع 3 ، 4 و 5 سانتی متر رسم کنید.
- اندازهٔ زاویه‌های این مثلث را محاسبه کنید.
- مثلث به دست آمده چه نوع مثلثی است؟
- چه رابطهٔ بین طول اضلاع این مثلث مشاهده می‌شود.
- عملیه‌های فوق را برای مثلثی به طول اضلاع 10,8 و 6 سانتی متر تکرار کنید.

فعالیت فوق را به عنوان معکوس قضیهٔ فیثاغورث طور زیر می‌توان بیان کرد:

معکوس قضیهٔ فیثاغورث:
اگر مجموع مربعات دو ضلع یک مثلث مساوی به مربع ضلع سوم آن باشد، آن مثلث قایم‌الزاویه است.

ثبوت: فرض کنید برای مثلث ABC به طول اضلاع a, b و c داریم $a^2=b^2+c^2$ مثلث $A'B'C'$ را به طول اضلاع c,b طوری رسم می‌کنیم که در رأس A' قایمه باشد، برای این کار ابتدا زاویه قایمهٔ A' را رسم نموده روی اضلاع آن قطعه خط‌هایی به طول b و c جدا می‌کنیم.
آن نقاط را B' و C' نامیده و با هم وصل می‌نماییم.



طبق قضیهٔ فیثاغورث در مثلث $A'B'C'$ داریم:

$$\overline{B'C'}^2 = b^2 + c^2$$

از طرف دیگر می‌دانیم که $b^2 + c^2 = a^2$ است در نتیجه:

$$\overline{B'C'}^2 = a^2$$

$$\overline{B'C'} = a$$

پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ نظر به حالت تساوی سه ضلع، انطباق پذیر هستند، در نتیجه زوایای آن‌ها نیز یک به یک مساوی اند. چون: $\hat{A}' = 90^\circ$ پس: $\hat{A} = 90^\circ$

یعنی: مثلث ABC قایم الزاویه است.

مثال: مثلثی به طول اضلاع $\overline{AB} = \sqrt{3}$, $\overline{AC} = \sqrt{2}$ و $\overline{BC} = \sqrt{5}$ چه نوع مثلثی است؟

حل: با در نظر داشت اندازه‌های اضلاع مثلث داریم:

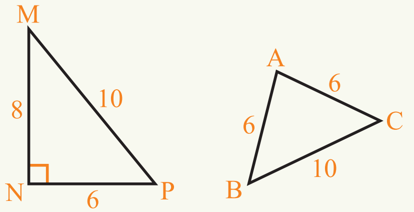
$$(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

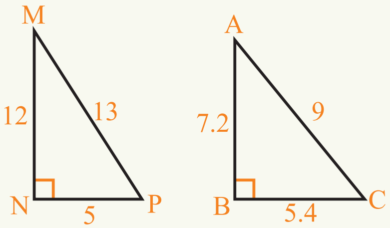
پس طبق عکس قضیهٔ فیثاغورث مثلث ABC در رأس A قایم است.

تمرین

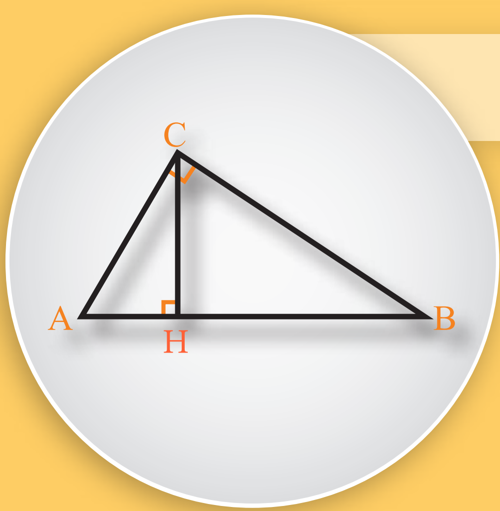
1- دو مثلث ABC و MNP داده شده‌اند. نشان دهید که کدام یکی آن‌ها مثلث قایم‌الزاویه است؟



2- صحت رابطهٔ فیثاغورث را در مثلث‌های قایم الزاویهٔ زیر تحقیق کنید.



قضایای مثلث قایم الزاویه



در شکل مقابل چند مثلث قایم الزاویه را می‌بینید؟ آیا این مثلث‌ها باهم مشابه اند؟

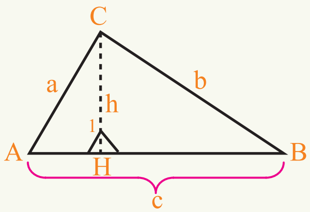
فعالیت

- مثلث قایم الزاویهٔ ABC را رسم کنید که زاویهٔ C آن قایمه باشد.
- از رأس C ارتفاع بالای وتر آن رسم نموده آن را $\overline{CH}$ بنامید.
- مثلث‌های ACH و BCH چه نوع مثلث‌های هستند؟
- آیا مثلث های ACH و ABC متشابه اند؟ چرا؟
- آیا مثلث های BCH و ABC متشابه اند؟ چرا؟
- آیا مثلث‌های ACH و BCH متشابه اند؟ چرا؟

از فعالیت فوق مشاهده می‌شود که ارتفاع بالای وتر یک مثلث قایم الزاویه، آن را به سه مثلث متشابه تقسیم می‌کند. با استفاده از این مطلب می‌توان برای ثبوت قضایای زیر استفاده کرد.

قضیه 1: در هر مثلث قایم الزاویه، حاصل ضرب اضلاع قایم، مساوی به حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر است.

ثبوت: فرض کنید $\overline{CH}$ ارتفاع بالای وتر مثلث قایم الزاویهٔ ABC باشد.در دو مثلث ACH و ABC داریم:



$\hat{C} = \hat{H}_1 = 90^\circ$

$\hat{A} = \hat{A}$ زاویه مشترک

$\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ACH}$

از تشابه دو مثلث نتیجه گیری می‌شود که مقابل زاویه‌های مساوی، اضلاع متناسب قرار دارد؛یعنی:

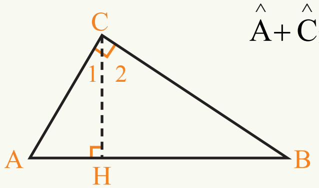
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{CB}}\Rightarrow \overline{AC}\cdot\overline{CB}=\overline{CH}\cdot\overline{AB}$$

قضیه 2: در هر مثلث قایم الزاویه مربع ارتفاع بالای وتر مساوی به حاصل ضرب دو قطعه خط ایجاد شده بالای آن وتر می‌باشد.

ثبوت: فرض کنید $\overline{CH}$ ارتفاع بالای وتر مثلث قایم الزاویه ABC باشد.

در مثلث قایم الزاویهٔ ABC داریم: $\hat{A}+\hat{B}=90^\circ$..............I

در مثلث قایم الزاویهٔ ACH داریم: $\hat{A}+\hat{C}_1=90^\circ$...........II



از روابط(I و II) نتیجه می گیریم که: $\hat{B}=\hat{C}_1$

به همین ترتیب می‌توانیم نشان دهیم که: $\hat{A}=\hat{C}_2$ است. چرا؟

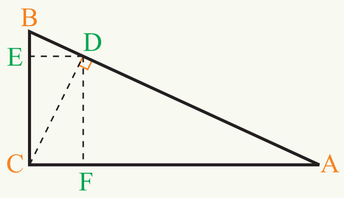
در دو مثلث قایم الزاویهٔ ACH و CBH داریم که:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{C}_2\\ \hat{C}_1=\hat{B}\\ \hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{ACH}\sim\overset{\Delta}{CBH}$$

از تشابه دو مثلث ACH و CBH نتیجه می‌شود که مقابل زاویه‌های مساوی اضلاع آن‌ها متناسب اند؛ یعنی:

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{HB}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}}\Rightarrow \overline{CH}^2=\overline{AH}\cdot\overline{HB}$$

مثال 1: در شکل زیر $\overline{CD}$ عمود بالای $\overline{AB}$ است و چهار ضلعی DECF یک مستطیل داده شده باشد، نشان دهید که مثلث BED با مثلث قایم ا لزاویه ABC مشابه است.



حل: در مثلث‌های ACB و BED داریم که:

زاویهٔ مشترک $\hat{B} = \hat{B}$

چون $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ است و BC قاطع است پس زوایای یک طرف قاطع با هم مساوی اند.

یعنی: $\hat{C} = B\hat{E}D = 90°$

دو زاویهٔ دو مثلث با هم مساوی شدند، بنابر آن تناسب بین اضلاع وجود دارد.

در نتیجه نظر به حالت تشابه مثلث ها می توان گفت:

$$B\overset{\Delta}{E}D \sim A\overset{\Delta}{C}B$$

نوت: در شکل تعداد مثلث‌های متشابه تشکیل شده را حساب کنید.

مثال 2: در شکل $\overline{CH}$ ارتفاع بالای وتر مثلث قایم‌الزاویه ABC است.

اگر $r = 4cm$ و $s = 9cm$ باشد h را دریافت کنید.

حل:

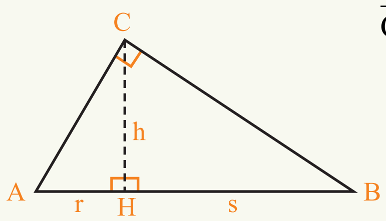
$$\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{BH}$$

$$\overline{CH}^2 = 4 \cdot 9$$

$$\overline{CH}^2 = 36$$

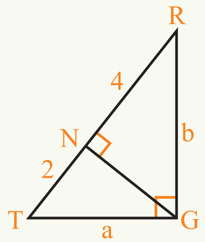
$$\sqrt{\overline{CH}^2} = \sqrt{36}$$

$$\overline{CH} = 6cm$$

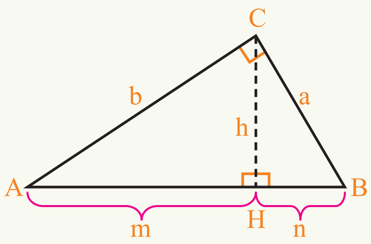


تمرین

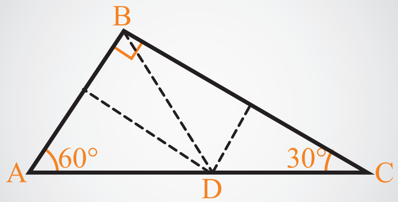
1- مثلث قایم‌الزاویه‌یی که زاویه G آن قایمه بوده، داده شده است قیمت‌های a و b را به دست آورید.



2- در مثلث قایم‌الزاویه ABC، CH ارتفاع بالای وتر AB می‌باشد. هرگاه $m = 9$ ، $n = 3$ باشد قیمت‌های a ، b و h را دریافت کنید.

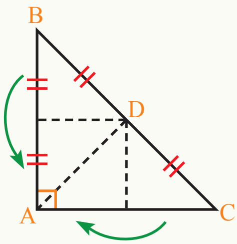


قضایا در مثلث قایم‌الزاویه برای زوایای °30 و °60



درشکل مقابل آیا ضلع مقابل زاویهٔ °30 برابر نصف طول وتر است؟

فعالیت

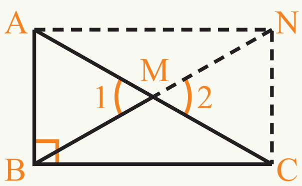


روی یک صفحهٔ کاغذ، مثلث قایم‌الزاویه‌یی؛ مانند شکل زیر رسم و آن را قیچی کنید.

- مثلث ABC را طوری قات کنید که رأس B بالای رأس A قرار گیرد.
- هم‌چنان آن را دوباره طوری قات کنید که رأس C بالای رأس A قرار گیرد.
- اگر نقطهٔ تقاطع را D بنامیم، آیا می توا ن گفت $\overline{AD} = \overline{DC} = \overline{DB}$ است؟ چرا؟

نتیجه‌یی که از فعالیت فوق به طور عملی به دست می‌آید می‌توانیم به صورت قضیهٔ زیر بیان و ثابت نماییم:

قضیه: در هر مثلث قایم‌الزاویه طول میانه که از رأس قایم بالای وتر آن رسم شده باشد، مساوی به نصف طول وتر است.



ثبوت: فرض کنید که $\overline{BM}$ میانهٔ وارد بر وتر مثلث ABC باشد. می‌خواهیم نشان دهیم که:

$$\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$$

برای ثبوت میانهٔ $\overline{BM}$ را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ N به دست آید.

پس: $\overline{BM}=\overline{MN}$

در دو مثلث AMB و MNC داریم:

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{AM}=\overline{MC} & \text{میانه است،}BM\\ \overline{BM}=\overline{MN} & \text{قرار ترسیم،}\\ \hat{M}_1=\hat{M}_2 & \text{قرار متقابل برأس،}\end{array}\right\}\Rightarrow A\overset{\Delta}{M}B\cong M\overset{\Delta}{N}C$$

با توجه به انطباق پذیری دو مثلث AMB و MNC نتیجه می‌شود که اضلاع متناسب این دو مثلث نیز انطباق پذیر اند؛ یعنی: $\overline{AB}=\overline{NC}$.............I

به همین ترتیب از انطباق پذیری دو مثلث AMN و BMC نتیجه می‌شود که: $\overline{AN}=\overline{BC}$.............II

چرا؟

پس از روابط(I و II) نتیجه می‌شود که در چهار ضلعی ABCN اضلاع مقابل باهم مساوی اند، چون یک زاویهٔ آن قایمه است، پس: ABCN یک مستطیل می‌باشد.

در مستطیل می‌دانیم که قطرها باهم مساوی بوده و همدیگر را نصف می‌کنند.

پس: $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AC}$

فعالیت

- مثلث قایم الزاویهٔ ABC را چنان رسم کنید که اندازهٔ زوایای حادهٔ آن 30° و 60° باشد.
- طول وتر و اضلاع قایم آن را با خط‌کش اندازه‌گیری کنید.
- چه رابطه بین طول اضلاع این مثلث وجود دارد؟
- تجربهٔ فوق را بایک مثلث قایم الزاویه دیگر به زوایای 30°, 60° تکرار کنید.

با استفاده از فعالیت فوق می‌توان قضیهٔ زیر را بیان و ثبوت کرد:

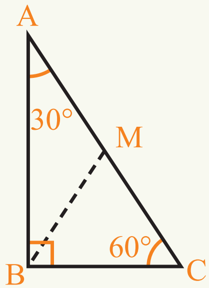
قضیه: در مثلث قایم الزاویه اگر اندازهٔ یک زاویهٔ حاده آن 30° باشد، طول ضلع مقابل این زاویه نصف طول وتر است.

ثبوت: در مثلث قایم الزاویهٔ ABC فرض کنید $\hat{A}=30^\circ$ و $\hat{B}=90^\circ$.

می‌خواهیم ثابت کنیم که:

$$\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$$

برای اثبات، میانهٔ بالای وتر را رسم نموده آن را BM می‌نامیم طبق قضیهٔ قبل می‌دانیم که میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است.



پس: $\overline{BM}=\overline{MC}$

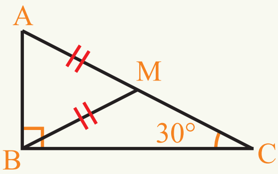
در نتیجه: مثلث BMC متساوی الساقین است.

از این جا نتیجه می گیریم $M\hat{B}C=M\hat{B}C=60^\circ$

پس مثلث MBC متساوی الاضلاع است. چرا؟

بنا بر آن $\overline{BC}=\overline{MC}$

چون M نقطه وسط AC است. در نتیجه $\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$



مثال: در شکل مقابل، اگر $\overline{BM}$ میانهٔ وارد بر وتر مثلث ABC 3 واحد باشد، طول اضلاع مثلث را تعیین کنید.

حل: در مثلث قایم‌الزاویه می‌دانیم میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است پس:

$$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{AC}\Rightarrow 3=\frac{1}{2}\overline{AC}\Rightarrow \overline{AC}=6$$

از طرف دیگر می‌دانیم ضلع مقابل زاویهٔ 30° نصف وتر است.

پس:

$$\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{AC}\Rightarrow \overline{AB}=\frac{1}{2}\times 6\Rightarrow \overline{AB}=3$$

حال با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث می‌توانیم اندازهٔ ضلع سوم مثلث را محاسبه کنیم.

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$$

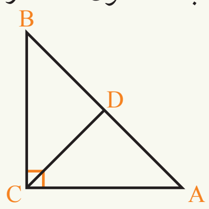
$$\Rightarrow 3^2+\overline{BC}^2=6^2$$

$$\Rightarrow 9+\overline{BC}^2=36\Rightarrow BC^2=36-9=27$$

$$\Rightarrow \overline{BC}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$$

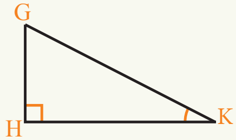
تمرین

1- در مثلث ABC، $\hat{C}$ قایمه است، اگر $\overline{AB}=16$ و $\overline{CD}$ میانه باشد، طول $\overline{CD}$ را دریابید.

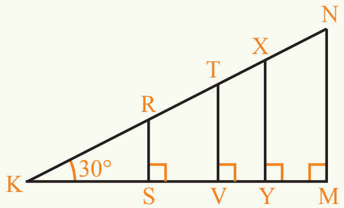


2- در شکل فوق اگر طول میانهٔ $\overline{CD}=15$ باشد $\overline{AB}$ را دریابید.

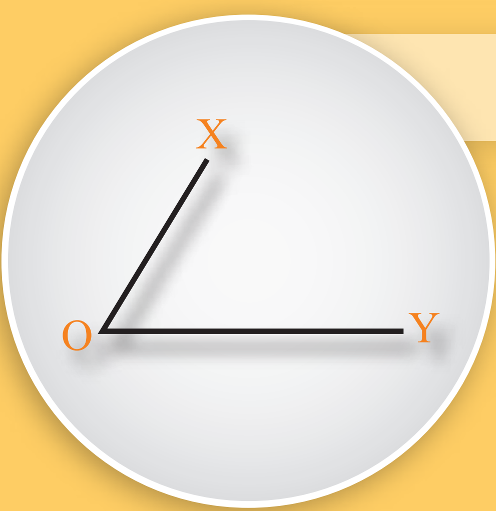
3- در مثلث GHK، $\hat{H}$ قایمه است و $\overline{GH}=\frac{1}{2}\overline{GK}$، اندازهٔ زاویهٔ K چقدر است؟



4- در مثلث KMN، $\hat{M}$ زاویهٔ قایمه است و اندازهٔ $\hat{K}=30^\circ$ است. $\overline{RS},\overline{TV}$, $\overline{XY}$ بر $\overline{KM}$ عمود اند. اگر $\overline{KN}=16$ واحد، $\overline{KX}=13$ واحد، $\overline{KT}=10$ واحد و $\overline{KR}=6$ واحد باشند در این صورت $\overline{XY}$, $\overline{RS},\overline{TV}$ و $\overline{MN}$ را دریابید.



ناصف‌الزاویه



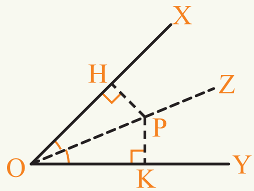
آیا تمام نقاط ناصف الزاویه از دو ضلع همان زاویه متساوی الفاصله اند؟

فعالیت

- ناصف الزاویه $\hat{xoy}$ را رسم کنید و آن را OZ بنامید.
- یک نقطهٔ کیفی را روی ناصف OZ انتخاب کرده آن را P بنامید.
- از نقطهٔ P بالای دو ضلع زاویه، یعنی ox و oy عمودها رسم کنیدآن‌ها را HP و KP بنامید.
- طول HP و KP را با خط کش اندازه بگیرید. چه رابطه بین طول‌های این عمودها ملاحظه می‌شود؟

مشاهدات فعالیت فوق را می‌توان طور زیر بیان و ثبوت کرد:

قضیه: هر نقطه روی ناصف الزاویه، از دو ضلع زاویه متساوی الفاصله است.



ثبوت: فرض می کنیم OZ ناصف‌الزاویه $Y\hat{O}X$ باشد،

می‌خواهیم نشان دهیم:

$$\overline{PH} = \overline{PK}$$

در دو مثلث HPO و KPO داریم:

$\hat{H} = \hat{K} = 90^\circ$

$X\hat{O}Z = Y\hat{O}Z$ ناصف‌الزاویه است، OZ

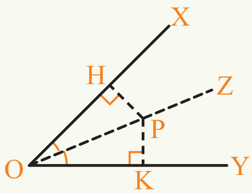
$\overline{OP} = \overline{OP}$ ضلع مشترک،

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{OPK} \cong \overset{\Delta}{OPH}$$

با در نظر داشت تساوی وتر و یک زاویهٔ حادهٔ دو مثلث قایم‌الزاویه OPK و OPH نتیجه می‌گیریم که این دو مثلث انطباق پذیر اند بنا بر این: $\overline{PK}=\overline{PH}$

معکوس قضیهٔ فوق نیز صحیح است.

قضیه: هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه متساوی الفاصله باشد، آن نقطه روی ناصف آن زاویه قرار دارد.



ثبوت: فرض می‌کنیم نقطهٔ P از دو ضلع XO و O متساوی‌الفاصله باشد؛ یعنی: $\overline{PK}=\overline{PH}$

می‌خواهیم نشان دهیم P روی ناصف الزاویهٔ YOX قرار دارد یعنی:

$$X\hat{O}P=Y\hat{O}P$$

برای این منظور دو مثلث قایم‌الزاویه HPO و KPO را در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{PH}=\overline{PK} & \text{قرار فرضیه}\\ \hat{H}=\hat{K} & \\ \overline{OP}=\overline{OP} & \text{ضلع مشترک}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{OPH}\cong\overset{\Delta}{OPK}$$

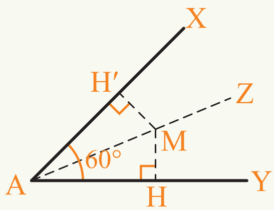
بنابر تساوی دو ضلع و یک زاویهٔ حاده، نتیجه می‌گیریم که مثلث های OPH و OPK انطباق پذیر اند؛ بنابراین زاویه‌های دیگر آن‌ها نیز انطباق پذیر اند.

پس: $X\hat{O}P=Y\hat{O}P$

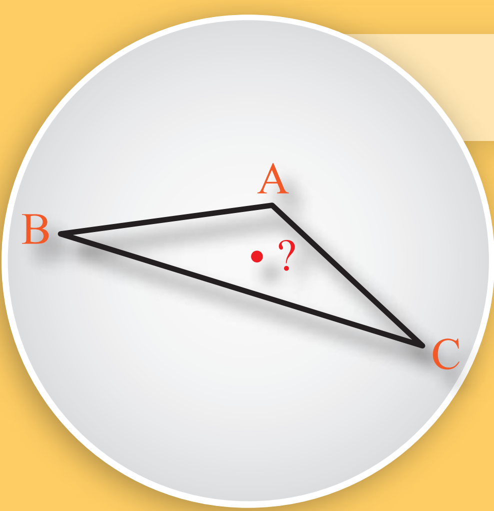
یعنی: P روی ناصف الزاویهٔ $X\hat{O}Y$ قرار دارد.

تمرین

نقطهٔ M روی ناصف الزاویه A قرار داشته، قطعه خط MH' بالای قطعه خط AX عمود است. طول اضلاع مثلث AMH را از جنس اضلاع مربوطه به دست آورید.



ناصف الزاویه‌های داخلی مثلث



آیا می‌توان نقطه یی را در داخل مثلث پیدا نمود که از هر سه ضلع مثلث فاصلهٔ مساوی داشته باشد؟

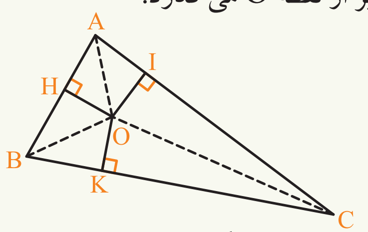
فعالیت

- یک مثلث کیفی ABC رسم کنید.
- ناصف الزاویه‌های داخلی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را طوری رسم کنید تا یکدیگر را در نقطه‌یی مانند O قطع کنند.
- ناصف‌الزاویهٔ داخلی $\hat{A}$ را رسم کنید.
- آیا ناصف‌الزاویهٔ $\hat{A}$ نیز از نقطهٔ O می‌گذرد؟
- یک مثلث کیفی دیگر $A'B'C'$ را رسم کرده، فعالیت فوق را برای آن تکرار کنید.

مشاهدات فعالیت فوق را می‌توان طور زیر بیان و ثبوت کرد:

قضیه: در هر مثلث ناصف الزاویه‌های داخلی یکدیگر را در یک نقطهٔ داخل مثلث قطع می‌کنند.

ثبوت: در مثلث ABC فرض می‌کنیم ناصف‌الزاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. نشان می‌دهیم که ناصف الزاویهٔ $\hat{A}$ نیز از نقطهٔ O می‌گذرد.



با در نظر داشت شکل زیر داریم:

چون نقطهٔ O روی ناصف الزاویهٔ $\hat{B}$ است.

پس: $\overline{OH}=\overline{OK}$..................I

و همچنان نقطهٔ O روی ناصف‌الزاویهٔ $\hat{C}$ است.

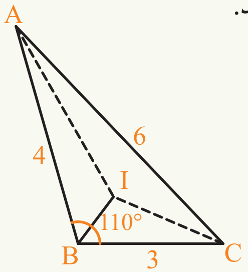
پس: $\overline{OK}=\overline{OI}$..................II

می‌دانیم وقتی یک طرف دو مساوات با هم مساوی شوند طرف دیگر آن‌ها نیز خود به خود مساوی می‌شوند. بنابراین از رابطهٔ I و II نتیجه می‌گیریم: $\overline{OH}=\overline{OI}$

از طرف دیگر قرار قضیه قبل می‌دانیم هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه متساوی‌الفاصله باشد آن نقطه روی ناصف آن زاویه قرار دارد؛ بنابراین نقطهٔ O روی ناصف‌الزاویهٔ A قرار دارد. در نتیجه می‌توان گفت هر سه ناصف الزاویه داخلی مثلث همدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

مثال: مثلث با طول اضلاع 6 ، 3 ، 4 واحد رسم کنید، نشان دهید که ناصف‌ها یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

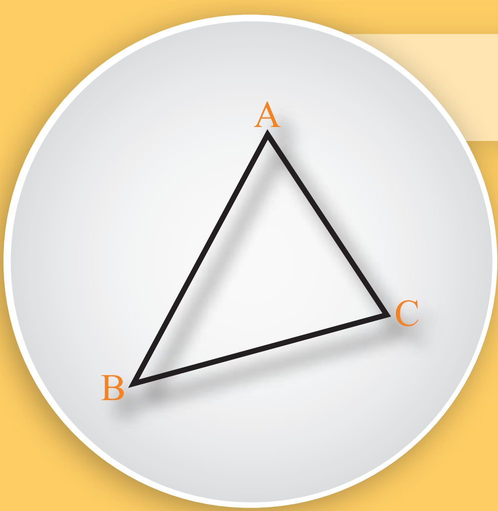
حل: مثلث ABC را در نظر گرفته از رأس‌های A ، B و C ناصف الزاویه‌ها را رسم نموده، دیده می‌شود که ناصف‌ها یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند.



تمرین

1- مثلثی با زاویه‌های $C=85^\circ, B=75^\circ, A=20^\circ$ رسم کنید. نشان دهید که ناصف الزاویه‌های آن‌ها یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

ناصف عمودی در یک مثلث



آیا ناصف عمودی یک ضلع مثلث حتماً از رأس مقابل آن می گذرد؟

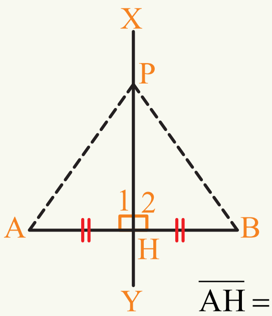
فعالیت



- ناصف عمودی قطعه خط AB را رسم کنید.
- یک نقطه مانند P بالای ناصف عمودی قطعه خط AB انتخاب کنید.
- دو انجام قطعه خط AB را به نقطهٔ P وصل کنید.
- توسط خط کش طول‌های $\overline{PA}$ و $\overline{PB}$ را اندازه بگیرید چه رابطه باهم دارند؟
- قطعه خط دیگری مانند $A'B'$ رسم کنید و فعالیت فوق را بر آن تکرار کنید.

نتیجهٔ مشاهده شده فوق را طور زیر می‌توان بیان و اثبات کرد.

قضیه: هر نقطهٔ روی ناصف عمودی یک قطعه خط از دو انجام آن متساوی الفاصله اند.



ثبوت: فرض می‌کنیم XY ناصف عمودی قطعه خط AB است. می‌خواهیم نشان دهیم که هر نقطهٔ اختیاری P روی ناصف عمودی از A و B فاصلهٔ مساوی دارد.

یعنی: $\overline{PB} = \overline{PA}$

در دو مثلث PAH و PBH داریم:

$\overline{AH} = \overline{BH}$ ناصف عمودی است، XY

$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ ناصف عمودی است، XY

$\overline{PH} = \overline{PH}$ ضلع مشترک،

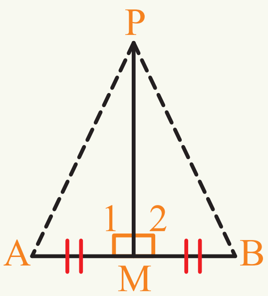
$\Rightarrow P\overset{\Delta}{A}H \cong P\overset{\Delta}{B}H$

چون در دو مثلث PAH و PBH دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها مساوی اند؛ بنابراین مثلث‌ها باهم انطباق پذیر اند. در نتیجه اضلاع آن‌ها نیز با هم مساوی اند.

یعنی: $\overline{PB} = \overline{PA}$

معکوس قضیهٔ فوق نیز صحیح است.

قضیه: هر نقطه که از انجام‌های یک قطعه خط متساوی الفاصله باشد، آن نقطه روی ناصف عمودی آن قطعه خط قرار دارد.



ثبوت: فرض می‌کنیم نقطهٔ P از دو انجام قطعه خط AB به فاصلهٔ مساوی قرار دارد.

یعنی: $\overline{PB} = \overline{PA}$

می‌خواهیم نشان دهیم P روی ناصف عمودی AB قرار دارد.

چون: $\overline{PB} = \overline{PA}$ است؛ پس مثلث PAB متساوی الساقین است؛ بنابراین: $\hat{A} = \hat{B}$

وسط قطعه خط AB را M می‌نامیم.

پس: $\overline{AM} = \overline{MB}$

نقطهٔ P را به وسط قطعه خط AB وصل نموده در دو مثلث PAM و PBM داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{PA} = \overline{PB} \\ \overline{MA} = \overline{MB} \\ \hat{A} = \hat{B} \end{array}\right\} \Rightarrow P\overset{\Delta}{A}M \cong P\overset{\Delta}{B}M$$

دو مثلث PAM و PBM بنا بر تساوی دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها با هم انطباق پذیراند در نتیجه زاویه‌های آن‌ها نیز یک به یک مساوی اند؛ یعنی: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

چون: $\hat{M}_1 + \hat{M}_2 = 180^\circ$

پس: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2 = 90^\circ$

بنا بر این، گفته می‌توانیم که PM قطعه خط AB را به طور عمودی تنصیف کرده است؛ پس P روی ناصف عمودی AB قرار دارد.

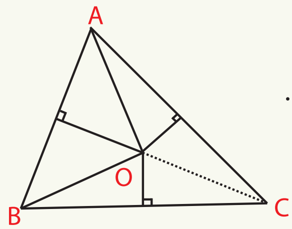
فعالیت

- مثلث کیفی ABC را رسم کنید.
- ناصف‌های عمودی اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ را رسم و نقطهٔ تقاطع آن‌ها را نقطه O بنامید.
- ناصف عمودی ضلع $\overline{BC}$ را رسم کنید. آیا این ناصف عمودی نیز از O می گذرد؟
- مثلث کیفی دیگری مانند $A'B'C'$ رسم کنید و فعالیت فوق را برای آن تکرار کنید.

مشاهدات فعالیت فوق را می توان طور زیر بیان و ثبوت کرد:

قضیه: در هر مثلث ناصف عمودی اضلاع آن یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

ثبوت: در مثلث ABC ناصف‌های عمودی اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند. می‌خواهیم نشان دهیم که نقطهٔ O روی ناصف عمودی ضلع $\overline{BC}$ قرار دارد.



چون نقطهٔ O روی ناصف عمودی $\overline{AB}$ است.

پس: $\overline{OA}=\overline{OB}$..................I

به همین قسم نقطهٔ O روی ناصف عمودی $\overline{AC}$ نیز قرار دارد.

پس: $\overline{OA}=\overline{OC}$..................II

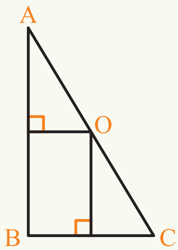
از مقایسهٔ تساوی‌های I و II می‌توان نتیجه گرفت که:

$\overline{OB}=\overline{OC}$

از طرف دیگر قرار قضیهٔ قبل می‌دانیم هر نقطهٔ که از انجام‌های یک قطعه خط متساوی‌الفاصله باشد آن نقطه روی ناصف عمودی آن قطعه خط قرار داشته؛ بنابراین نقطهٔ O روی ناصف عمودی ضلع $\overline{BC}$ قرار دارد.

در نتیجه ناصف‌های عمودی اضلاع هر مثلث در یک نقطه یک دیگر را قطع می کنند.

مثال: یک مثلث قایم‌الزاویه رسم کنید. محل تقاطع ناصف‌های عمودی اضلاع آن را دریافت کنید.



حل: مثلث قایم‌الزاویهٔ ABC و ناصف‌های عمودی آن را رسم می کنیم، دیده می‌شود که ناصف‌های عمودی اضلاع قایم مثلث قایم‌الزاویه در نقطهٔ وسطی بالای وتر یکدیگر را قطع می کنند.

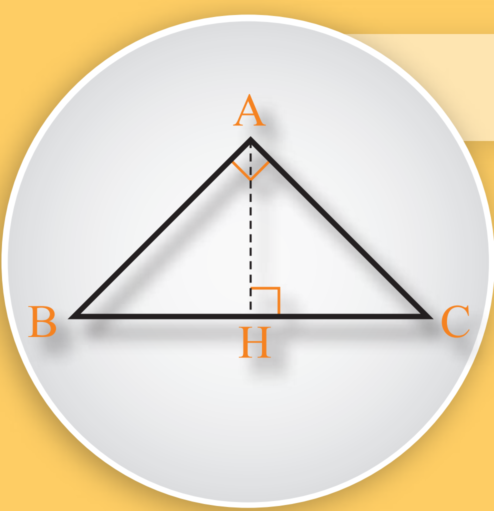
در نتیجه می‌توان گفت ناصف‌های عمودی در هر مثلث قایم‌الزاویه یکدیگر را در نقطۀ وسطی بالای وتر قطع می‌کنند.

تمرین

1- مثلث ABC را به زاویه‌های $30^\circ, 70^\circ, 80^\circ$ رسم کنید. محل تقاطع ناصف‌های عمودی اضلاع آن را دریافت کنید.

2- مثلثی به اضلاع 6، 4 و 2.5 سانتی متر رسم کنید. ناصف‌های عمودی اضلاع آن را ترسیم و محل تقاطع ناصف‌های عمودی را دریافت کنید.

ارتفاع های مثلث

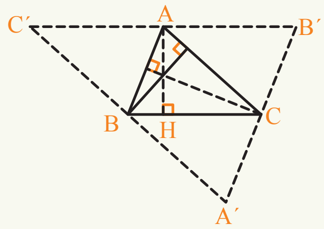


مثلث ABC قایم‌الزاویه است اگر AH ارتفاع بالای وتر مثلث باشد ارتفاع‌های دیگر مثلث کدام ها اند؟

فعالیت

- مثلث کیفی ABC را رسم کنید.
- از رأس A ارتفاع بالای ضلع $\overline{BC}$ را رسم کنید، انجام آن را H بنامید.
- از رأس‌های مثلث ABC خطوطی موازی به اضلاع آن رسم کنید.
- مثلث حاصل شده از تقاطع، این خطوط را $A'B'C'$ نامگذاری کنید طوری که $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{A'C'} \parallel \overline{AC}$ و $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$.
- آیا قطعه خط AH بر قطعه خط $B'C'$ عمود است چرا؟
- آیا چهار ضلعی $ABCB'$ متوازی الاضلاع است چرا؟
- آیا $\overline{AB'} = \overline{AC'}$ است؟ چرا؟
- آیا قطعه خط $\overline{AH}$ ناصف عمودی قطعه خط $B'C'$ است چرا؟

در فعالیت فوق مشاهده می‌شود که:
اگر از رأس‌های یک مثلث خطوطی موازی به اضلاع آن رسم کنیم در این صورت ارتفاع‌های مثلث اولیه ناصف عمودی اضلاع مثلث تشکیل شده است.
می‌دانیم ناصف‌های عمودی اضلاع مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند؛ پس ارتفاع های مثلث، هم یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.
قضیه: در هر مثلث ارتفاع ها در یک نقطه متقاطع اند.



ثبوت: از رأس‌های مثلث ABC خطوطی را موازی به اضلاع آن رسم می کنیم. از تقاطع خطوط مثلث $A'B'C'$ مانند شکل مقابل تشکیل می‌شود در این حالت می‌توان نوشت:

$\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$, $\overline{A'C'} \parallel \overline{AC}$ و $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$.

با در نظر داشت این که اضلاع مقابل چهارضلعی $ABCB'$ موازی هستند نتیجه می گیریم که این چهار ضلعی یک متوازی‌الاضلاع است.

بنابراین اضلاع مقابل چهار ضلعی $ABCB'$ مساوی‌اند.

یعنی:

$$\overline{AB'} = \overline{BC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{I}$$

به همین ترتیب چهار ضلعی $ACBC'$ نیز متوازی الاضلاع است؛ در نتیجه:

$$\overline{AC'} = \overline{BC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{II}$$

از روابط I و II نتیجه می گیریم که:

$$\overline{AB'} = \overline{AC'}$$

از طرف دیگر چون $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ و $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ است بنا بر این $\overline{AH} \perp \overline{B'C'}$ است.

نظر به این که $\overline{AB'} = \overline{AC'}$ و $\overline{AH} \perp \overline{B'C'}$

پس: $\overline{AH}$ ناصف عمودی $\overline{B'C'}$ است.

به همین شکل می‌توان نشان داد که ارتفاع‌های بالای اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ نیز به ترتیب ناصف‌های عمودی اضلاع $\overline{A'B'}$ و $\overline{A'C'}$ هستند. چون ناصف‌های عمودی در یک نقطه یکدیگر را قطع می کنند؛ پس ارتفاع ها نیز یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

تمرین

1- مثلث ABC را به اضلاع 5، 4 و 6 سانتی متر رسم کنید. از هر رأس بالای ضلع مقابل، ارتفاع را رسم نموده و محل تقاطع آن‌ها را در صفحه مشخص کنید.

2- یک مثلث قایم‌الزاویه را رسم نموده محل تقاطع ارتفاع‌های این مثلث را مشخص کنید.

3- مثلث منفرجهٔ‌الزاویه رسم نموده محل تقاطع ارتفاع های آن را مشخص کنید.

- مثلث کیفی ABC را رسم کنید.

میانه‌های مثلث



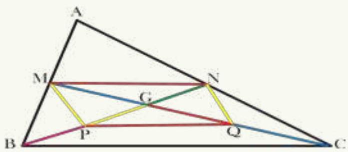
آیا فکر کرده می‌توانید هر گاه یک مثلث را روی نوک تیز یک پنسل قرار دهید و نیفتد؟

فعالیت

- مثلث کیفی ABC را رسم کنید.
- از رأس B میانهٔ $\overline{BN}$ و از رأس C میانهٔ $\overline{CM}$ را رسم کنید.
- نقطهٔ تقاطع آن دو میانه را G نام‌گذاری کنید.
- طول‌های $\overline{BG}$ و $\overline{GN}$ را با خط‌کش اندازه کنید. این طول‌ها چه رابطه دارند؟
- طول‌های $\overline{CG}$ و $\overline{GM}$ را با خط‌کش اندازه کنید. این طول‌ها با هم چه رابطهٔ دارند؟
- از رأس A میانه بالای ضلع $\overline{BC}$ رسم و انجام آن را K بنامید.
- آیا $\overline{AK}$ از نقطهٔ G عبور می‌کند؟
- طول‌های $\overline{AG}$ و $\overline{GK}$ را با خط‌کش اندازه‌گیری نمایید و بگویید این طول‌ها با هم چه رابطه دارند؟

قضیه: میانه‌های هر مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع نموده و نقطه تقاطع، هر میانه را به نسبت 2 بر 1 تقسیم می‌کند.

ثبوت: در مثلث $\overline{ABC}$ نقطهٔ G محل تقاطع میانه‌های $\overline{BN}$ و $\overline{CM}$ است. با در نظر داشت این که قطعه خط $\overline{MN}$ وسطهای اضلاع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ را با هم وصل می‌کند. پس طبق قضیهٔ تالس نتیجه می‌شود که:



$\overline{BC} \parallel \overline{MN}$

$$\Rightarrow \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{BC} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots I$$

نقطهٔ وسطی $\overline{BG}$ را P می‌نامیم و نقطهٔ وسطی $\overline{CG}$ را Q می‌نامیم.

$\overline{PQ}$ قطعه خطی است که وسط اضلاع $\overline{BG}$ و $\overline{CG}$ را در مثلث GBC با هم وصل می کند.

بنا بر قضیه تالس در مثلث GBC می‌توان نتیجه گرفت که: $\overline{BC} \parallel \overline{PQ}$

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{BC} \ldots\ldots\ldots\ldots II$$

از روابط I و II نتیجه می‌شود که چهارضلعی MNQP که دو ضلع آن موازی و مساوی اند. یک متوازی الاضلاع است.

در متوازی الاضلاع MNQP قطرها یکدیگر را تنصیف می کنند؛ بنابراین:

$\overline{PG} = \overline{GN}$ و $\overline{QG} = \overline{GM}$

از طرف دیگر می‌دانیم:

$\overline{PG} = \overline{PB}$ و $\overline{QG} = \overline{QC}$

بنا بر این:

$\overline{PG} = \overline{GN} = \overline{PB}$ و $\overline{QG} = \overline{GM} = \overline{QC}$

در نتیجه:

$$\frac{\overline{BG}}{\overline{GN}} = \frac{\overline{CG}}{\overline{GM}} = \frac{2}{1}$$

چون میانه های $\overline{BN}$ و $\overline{MC}$ در مثلث ABC دلخواه انتخاب شده اند، پس این رابطه برای هر دو میانه دلخواه دیگر نیز درست است.

از این‌جا نتیجه می‌شود که سه میانهٔ مثلث، یکدیگر را در یک نقطه قطع می کنند.

و نقطهٔ تقاطع، هر میانه را به نسبت 2 بر 1 تقسیم می کند.

نقطهٔ تقاطع میانه ها به نام مرکز ثقل مثلث یاد می گردد.

تمرین

1- یک مثلث قایم‌الزاویه رسم نموده محل تقاطع میانه‌های آن را مشخص کنید.

2- نشان دهید که در هر مثلث متساوی الاضلاع محل تقاطع میانه‌ها، ناصف‌ها و ارتفاع‌ها در یک نقطه می‌باشند.

3- در مثلث ABC اگر G مرکز تقاطع میانه‌های $\overline{AM}, \overline{BN}$ و $\overline{CK}$ باشد نشان دهید که:

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AM}} = \frac{2}{3} \quad , \quad \frac{\overline{GM}}{\overline{AM}} = \frac{1}{3}$$

نکات مهم فصل پنجم

• قضایای مثلث متساوی الساقین

– اگر دو ضلع یک مثلث با هم مساوی باشند؛ پس زوایای مقابل آن دو ضلع نیز با هم مساوی‌اند.

– اگر دو زاویهٔ یک مثلث با هم مساوی باشند؛ اضلاع مقابل زوایای مذکور نیز با هم مساوی هستند.

• قضیهٔ فیثاغورث

– در هر مثلث قایم‌الزاویه مساحت مربعی که توسط اندازه وتر ساخته می‌شود برابر مجموع مساحت‌های دو مربعی است که توسط اندازهٔ دو ضلع قایم آن مثلث ساخته می‌شود.

– در هر مثلث قایم‌الزاویه مربع وتر، مساوی به مجموع مربع‌های اضلاع قایم آن می‌باشد:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

• عکس قضیهٔ فیثاغورث

اگر مجموع مربعات دو ضلع یک مثلث مساوی به مربع ضلع سوم آن باشد آن مثلث قایم‌الزاویه است.

• قضایای مثلث قایم الزاویه

– در هر مثلث قایم الزاویه حاصل ضرب اضلاع قایم مساوی به حاصل ضرب وتر در ارتفاع وارد بر وتر است.

– در هر مثلث قایم‌الزاویه طول میانهٔ که از رأس قایم رسم می‌شود عبارت از حاصل ضرب دو ضلع قایم بالای وتر همان مثلث می‌باشد.

– در هر مثلث قایم‌الزاویه ارتفاعی که از رأس قایم بالای وتر آن رسم شده، مساوی به نصف طول وتر است.

– در مثلث قایم‌الزاویه اگر اندازهٔ یک زاویهٔ حاده آن $30°$ باشد، طول ضلع مقابل این زاویه نصف طول وتر است.

• قضایای خطوطی که یکدیگر را در یک نقطه داخل مثلث قطع می‌کنند

– هر نقطه روی ناصف‌الزاویه از دو ضلع زاویه متساوی الفاصله است.

– هر نقطهٔ که از دو ضلع یک زاویه متساوی الفاصله باشد آن نقطه روی ناصف آن زاویه قرار دارد.

– در هر مثلث ناصف الزاویه‌های داخلی یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

– هر نقطه روی ناصف عمودی یک قطعه خط از دو انجام آن متساوی الفاصله اند.

– هر نقطه که از انجام‌های یک قطعه خط متساوی الفاصله باشد آن نقطه روی ناصف عمودی آن قطعه خط قرار دارد.

– در هر مثلث ناصف عمودی اضلاع آن یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

– در هر مثلث ارتفاعات در یک نقطه متقاطع‌اند.

– میانه‌های هر مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند و نقطهٔ تقاطع میانه‌ها، هر میانه را به نسبت 2 بر 1 تقسیم می‌کنند.

تمرین عمومی

برای سؤال‌های زیر چهار جواب داده شده است. جواب صحیح را دریافت و دور آن را حلقه نمایید.

1- در مثلث منفرج‌الزاویه محل تقاطع هر سه ناصف عمودی در کجا است؟

a) در داخل مثلث　　b) در خارج مثلث

c) بالای ضلع بزرگ　　d) هیچ کدام

2- مثلثی به اضلاع 8، 4 و 5 واحد طول مفروض است، سه ارتفاع این مثلث یکدیگر را:

a) در داخل مثلث قطع می‌کنند　　b) در خارج مثلث قطع می‌کنند

c) روی ضلع به طول 5 متقاطع اند.　　d) در رأس مقابل بزرگترین ضلع قطع می‌کنند.

3- در مثلث قایم‌الزاویه طول ضلع مقابل زاویه $30°$ عبارت است از:

a) نصف وتر　　b) مساوی به وتر　　c) 1 بر 3 وتر　　d) 1 بر چهارم وتر

4- هرگاه در مثلث قایم‌الزاویه اندازهٔ اضلاع قایم 3 و 2 واحد باشند، طول وتر عبارت است از:

a) $\sqrt{13}$　　b) $\sqrt{3}$　　c) 3　　d) 2

5- در مثلث متساوی الساقین یک زاویهٔ قاعدهٔ آن مساوی به $65°$ است.

زاویهٔ قاعدهٔ دیگر آن عبارت است از:

a) $50°$　　b) $65°$　　c) $70°$　　d) $45°$

در عبارات زیر جاهای خالی را با کلمات مناسب پر نمایید.

1- در هر مثلث قایم‌الزاویه حاصل ضرب اضلاع قایم مساوی به .... وتر و ارتفاع آن مثلث است.

2- در هر مثلث قایم‌الزاویه .... ارتفاع بالای .... عبارت از.................. بالای آن وتر می‌باشد.

3- در مثلث قایم‌الزاویه طول .... زاویهٔ $30°$ مساوی به .... وتر آن است.

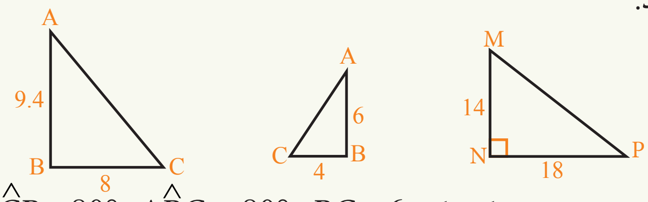
4- در مثلث منفرج الزاویه ارتفاعات یکدیگر را .... قطع می‌کنند.

5- اگر طول اضلاع یک مثلث به ترتیب 3cm، 4cm و 5cm باشند. مثلث مذکور .... است.

6- هرگاه در یک مثلث دو ضلع آن با هم مساوی باشد .... آن با هم مساوی است.

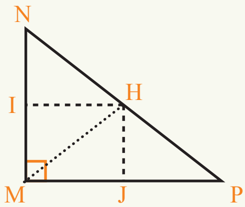
سؤالات زیر را حل نمایید.

1- در اشکال زیر مثلث‌های قایم‌الزاویه داده شده اند، وترهای مثلث ها را به تقریب کمتر از 0.1 حساب کنید.



2- مثلث ABC را طوری رسم کنید که $BC = 6$ ، $A\hat{B}C = 80^\circ$ و $A\hat{C}B = 80^\circ$ باشد، بعد از آن ناصف‌های مثلث‌های مذکور را رسم کنید.

3- مثلث MNP قایم به رأس M را در نظر بگیرید. ارتفاع $\overline{MH}$ را در مثلث مذکور رسم نموده نقاط I و J وسط $\overline{MN}$ و $\overline{MP}$ می‌باشند.



a) ثبوت کنید که مثلث‌های MIH و MJH متساوی‌الساقین با قاعدۀ مشترک $\overline{MH}$ می‌باشد.

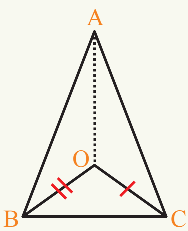
b) ثبوت کنید که $\overline{IJ}$ ناصف عمودی $\overline{MH}$ است.

c) ثبوت کنید $\overline{HI}$ و $\overline{HJ}$ بر همدیگر عمود می‌باشند.

4- در مثلث متساوی الساقین ABC، $\overline{AB} = \overline{AC}$ بوده، اگر $\overline{OB}$ و $\overline{OC}$ ناصف‌الزاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ باشند، ثبوت کنید که:

a) $\overline{OB} = \overline{OC}$

b) $\overline{OA}$ ناصف‌الزاویه $\hat{A}$ است.



فصل ششم

مساحت و احجام



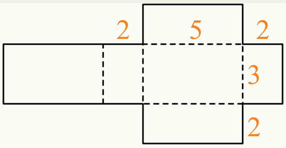


مساحت و حجم مکعب مستطیل



آیـا تا به حال فکر کـرده اید که یک انســان در هر بار تنفس چه مقدار هوا را داخل شش‌های خود می کند؟

فعالیت

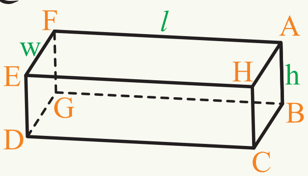


- شکل مقابل را به اندازه‌های داده شده در کاغذ رسم، قیچی و بر روی خط های نقطه‌چین آن را قات کنید.
- یک مکعب مستطیل به طول 5cm، عرض 2cm و ارتفاع 3cm رسم کنید.
- مکعب مستطیل مذکور چند رأس، چند ضلع و چند سطح دارد؟ هر یک را بشمارید.
- مساحت سطح‌های جانبی را که هر سطح آن مستطیل می‌باشند دریابید.
- مکعب مستطیل مذکور چند قاعده دارد؟ مساحت قاعدهٔ آن را دریافت کنید.
- با استفاده از مجموع مساحت‌های فوق فورمول مساحت کلی مکعب مستطیل مذکور را بنویسید.

از فعالیت فوق تعریف زیر را می یابیم که:

تعریف

مکعب مستطیل یک شش وجهی منظم هندسی است که همه سطوح آن مستطیل شکل بوده و مساحت‌های هر وجه مقابل آن دو به دو مساوی و موازی، زوایای سطوح آن دو به دو با هم قایم باشند. اگر طول مکعب مستطیل را به ℓ ، عرض آن را به w و ارتفاع آن را به h ارائه نماییم. طوری که مکعب مستطیل دارای شش سطح بوده و مساحت سطح جانبی آن عبارت است از: $S = 2(wh + h\ell)$
و مساحت قاعدتین آن عبارت است از: $B=2w\ell$



و مساحت کلی آن عبارت است از: $A = w\ell + \ell h + wh + w\ell + \ell h + wh$

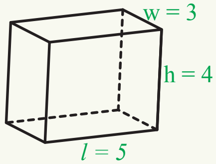
و یا $A = 2(\ell w + \ell h + wh)$

مکعب مستطیل که هر سه بعد (طول، عرض و ارتفاع) آن با هم مساوی باشند آن را مکعب می‌نامیم. اگر مساحت کلی آن را به A نشان دهیم داریم که:

$A = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2$ و یا $A = 6a^2$

مکعبی که طول، عرض و ارتفاع آن یک باشد آن را مکعب واحد گویند.

مثال 1: مساحت کلی مکعب مستطیلی را دریافت نمایید که طول آن 5cm ، عرض آن 3cm و ارتفاع آن 4cm باشد.



حل:

$\ell = 5cm$

$w = 3cm$

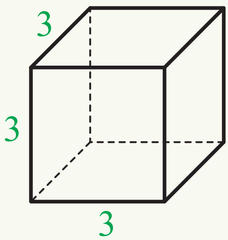
$h = 4cm$

$$A = 2(\ell w + \ell h + wh) = 2(5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4)$$

$$A = 2(15 + 20 + 12) = 2(47)$$

مساحت کلی $A = 94cm^2$

مثال 2: اگر مساحت کلی یک مکعب $54cm^2$ باشد، طول ضلع این مکعب چقدر است؟ آن را رسم کنید.



حل:

$A = 6a^2$

$6a^2 = 54$

$a^2 = \frac{54}{6} = 9$

$a = 3cm$

فعالیت

- مکعب مستطیلی را به طول 3cm، عرض 2cm و ارتفاع 2cm رسم کنید.

• با چند مکعب واحد می‌توان داخل این مکعب مستطیل را پر کرد؟ حجم شکل تشکیل شده چقدر است؟
• اگر داخل مکعب مستطیل مذکور را باردیگر با یک قطار مکعب‌های واحد دیگر پر کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟ و حجم آن چقدر است؟
• چه رابطه بین طول، عرض و ارتفاع مکعب مستطیل برای محاسبهٔ حجم می‌توان دریافت؟
• اگر ده قطار مکعب‌های واحد دیگر را داخل مکعب مستطیل اولیه قراردهیم حجم شکل تشکیل شده چقدر است؟
• آیا می‌توانید فورمولی برای محاسبهٔ حجم مکعب مستطیل ارائه کنید؟

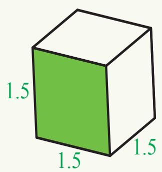
از فعالیت فوق می‌دانیم که:

حجم مکعب مستطیل که طول آن ℓ ، عرض آن w و ارتفاع آن h باشد مساوی است به:

حجم مکعب مستطیل $V=\ell \times w \times h$

حجم مکعب $V=a\times a\times a=a^3$

مثال 1: حجم مکعب مقابل را دریافت کنید.



حل: $V=a\times a\times a=a^3$

$V=1.5\times 1.5\times 1.5$

حجم مکعب $V=3.375cm^3$

مثال 2: حجم یک مکعب مستطیل 24 متر مکعب و مساحت قاعدهٔ آن 8 متر مربع است. ارتفاع این مکعب چند متر است؟

حل:

حجم مکعب مستطیل $V=\ell \times w\times h$

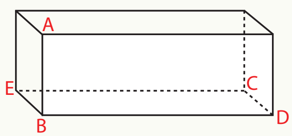
$24=8\times h$

$h=24\div 8=3\,m$

شما می‌دانید که در هر مکعب مستطیل قطعه خطی که دو رأس مقابل را با هم وصل می‌کند قطر مکعب مستطیل نامیده می‌شود. برای دریافت آن فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

• در شکل مقابل طول ضلع‌های $\overline{AB}, \overline{BD}$ و $\overline{BE}$ را به ترتیب a، b و c نامگذاری کنید.



• رأس A را به C و رأس C را به B طوری وصل کنید تا یک مثلث قایم‌الزاویه تشکیل شود.
• در مثلث قایم‌الزاویهٔ ABC وتر آن $\overline{AC}$ است برای آن رابطهٔ فیثاغورث را بنویسید.
• چون تمام سطح‌های یک مکعب مستطیل، مستطیل شکل بوده و دو به دو با هم انطباق پذیر اند؛ پس $\overline{BE} = \overline{DC}$.
• در مثلث قایم الزاویهٔ BCD وتر آن $\overline{BC}$ بوده و با استفاده از قضیهٔ فیثاغورث طول ضلع BC را دریافت و در رابطهٔ قبلی وضع کنید.

از فعالیت فوق می‌یابیم که:

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

اگر در یک مکعب مستطیل a=b=c باشد پس قطر مکعب قرار زیر به دست می‌آید:

$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow \overline{AC} = a\sqrt{3}$$

مثال: قطر مکعب مستطیلی را به ابعاد 2cm ، 3cm و 6cm محاسبه کنید.

حل: با قرار دادن $a = 2cm$, $b = 3cm$ و $c = 6cm$ در فورمول قطر، طول ضلع $\overline{AC}$ را به دست می‌آوریم:

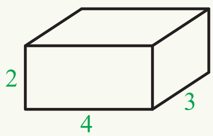
$$\overline{AC} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7cm$$

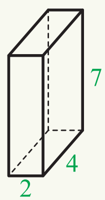
تمرین

1- طول سنگ کاری یک دیوار 60cm، عرض آن 30cm و ارتفاع آن 120cm است. حجم آن را به سانتی مترمکعب دریافت کنید.

2- اگر طول ، عرض و ارتفاع یک مکعب 3 برابر شوند، حجم مکعب چند برابر می‌شود؟

3 - مساحت کل و حجم مکعب مستطیل‌های زیر را به‌دست آورید.





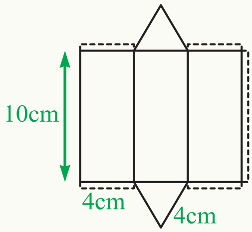
4 - اگر طول، عرض و ارتفاع یک مکعب را دو برابر کنیم، چه تغییری در طول قطر آن به وجود می‌آید؟

مساحت و حجم منشور



آیا تا به حال فکر کرده‌اید خیمه‌هایی که در آن زنده گی می کنند چه شکل هندسی را دارا اند؟

فعالیت



شکل مقابل را روی یک کاغذ به اندازه‌های داده شده رسم کنید. پس از جداکردن شکل از کاغذ، کاغذ را به امتداد خطوط طوری قات نمایید تا یک جسم بسته به وجود بیاید.

- شکل تشکیل شده کدام شکل هندسی است؟
- در شکل فوق چند سطح و چند قاعده را مشاهده می کنید؟
- مساحت هر یک از مستطیل‌های مساوی فوق را به دست آورید.
- مساحت دو قاعدهٔ مثلثی فوق را دریافت کنید.
- مجموع دو مساحه به دست آمده در فوق چه چیزی را نشان می‌دهد؟

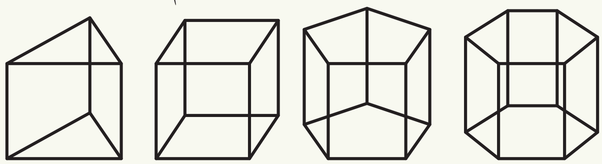
از فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

تعریف

منشور جسم منظم هندسی است که سطوح مقابل آن با هم مساوی و موازی بوده و زوایای سطوح متقابل آن باهم انطباق پذیر اند. سطوح جانبی منشور مستطیل شکل اند و مجموع مساحت‌های این مستطیل ها مساحت سطوح جانبی منشور نامیده می‌شود.

اگر محیط قاعده را در ارتفاع آن ضرب کنیم مساحت سطوح جانبی به دست می‌آید. و با جمع کردن مساحت سطوح جانبی با مساحت‌های قاعدتین مساحت کلی منشور حاصل می‌شود. اگر سطح های منشور بر قاعده عمود باشد، آن را منشور قایم می‌نامند.

منشورها را بر اساس شکل چند ضلعی قاعده‌های آن‌ها نام‌گذاری می کنند.



منشور 6 ضلعی   منشور 5 ضلعی   منشور 4 ضلعی   منشور 3 ضلعی



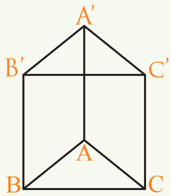
کتاب ریاضی خود و هم‌صنفی‌های خود را گرفته طوری که در شکل مقابل می بینید بالای هم قرار دهید. شکل تشکیل شده یک منشور مستطیلی یا مکعب مستطیل می‌شود. در اینجا به ملاحظه می‌رسد که حجم مکعب مستطیل مذکور مساوی به مجموع حجم کتاب‌ها می‌باشد؛ یعنی $V=B\times h$

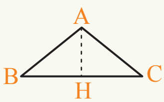
گونیاهای خود را روی هم قرار دهید. یک منشور مثلثی به دست می آید که حجم آن مساوی به مساحت قاعده ضرب در ارتفاع است؛ که در آن B مساحت قاعده و h ارتفاع است.

مثال: مساحت کل و حجم منشور 3 ضلعی را پیدا کنید که قاعدهٔ آن یک مثلث متساوی الاضلاع به طول 2cm و ارتفاع آن 4cm است.

حل: در قدم اول ارتفاع مثلث (قاعده منشور)؛ یعنی AH را دریافت می کنیم.

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH^2 = (2^2) - (1)^2 \Rightarrow AH = \sqrt{3}$$





مساحت یک سطح جانبی $= 2\times 4 = 8cm^2$

مساحت سه سطح جانبی $= 3\times 8 = 24cm^2$

مساحت قاعده $= \frac{1}{2}\times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$

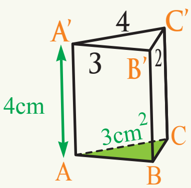
مساحت دو قاعده $= 2\sqrt{3}$

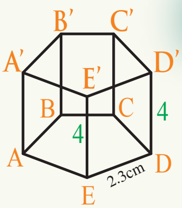
مساحت قاعدتین + مساحت سطوح جانبی = مساحت کلی

مساحت کلی $= 24 + 2\sqrt{3}$

$V = 4\sqrt{3}$

تمرین





مساحت کلی و حجم منشورهای مقابل را محاسبه کنید:

$S_{(ABCD)} = 12.92cm^2 \qquad S_{(ABC)} = 3cm^2$

مساحت و حجم استوانه



بسیاری از وسایلی که در زنده گی روزانه با آن سر و کار داریم استوانه یی شکل است. مثال: گیلاس آب، نل آب و غیره...
آیا می توانید چند شی استوانه یی شکل دیگر را نام ببرید؟

فعالیت

طول ارتفاع یک استوانهٔ قایم مساوی به 5cm و شعاع قاعدهٔ آن 2cm است. به امتداد ارتفاع، استوانهٔ باز شدهٔ آن را رسم کنید.

- طول و عرض مستطیل حاصله چند است؟
- مساحت مستطیل را به دست آورید.
- مساحت این مستطیل چه رابطه با مساحت سطح جانبی استوانه دارد؟
- مساحت هر یک از قاعده‌های استوانه را با در نظر داشت شعاع قاعده ($2cm$) دریابید.
- مساحت کلی استوانه را حساب کنید.

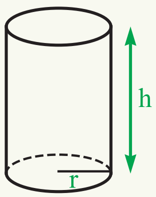
ازفعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

تعریف

استوانهٔ قایم از دو قاعدهٔ دایروی انطباق پذیر و یک سطح جانبی که بر قاعده‌ها عمود اند تشکیل شده است. اگر ارتفاع آن را به h، شعاع قاعدهٔ آن را به r ، مساحت سطوح جانبی آن را به S و مساحت کلی را به A نشان دهیم:

مساحت سطح جانبی $= 2\pi r \times h$

مساحت قاعدتین $= 2\pi r^2$



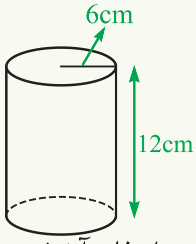
مساحت کلی استوانه

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \times h$$

$$A = 2\pi r(r + h)$$

$\pi = 3.14$

مثال 1: مساحت کلی استوانهٔ مقابل را محاسبه کنید.



حل:

$$A = 2\pi r(r+h) = 2\times 3.14(6)(6+12)$$

$$A = 6.28\times 6(18) = 37.68(18)$$

$$A = 678.24cm^2$$

یادداشت: برای محاسبهٔ حجم منشور ابتدا مساحت قاعده را محاسبه و در ارتفاع آن ضرب کردیم. برای پیدا کردن حجم استوانه نیز مساحت قاعدهٔ دایروی را در ارتفاع آن ضرب می‌کنیم. اگر حجم استوانه را به V نشان دهیم داریم که: $V = \pi r^2 \times h$

مثال 2: هرگاه حجم یک ماشین 4 سلندره، که قطر هر سلندر آن 8cm است مساوی به $1600cm^3$ باشد ارتفاع هر سلندر چند است؟

حل: چون r=4cm ، h=? ، $V=1600cm^3$ است، پس با استفاده از فورمول برای 4 سلندر داریم:



$$V = 4(\pi r^2 \cdot h)$$

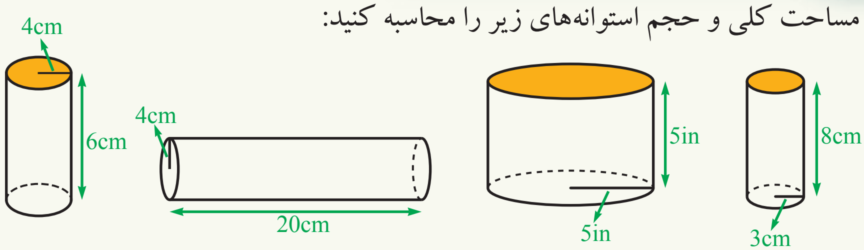
$$1600 = 4(\pi \cdot 16 \cdot h)$$

$$1600 = 200.96h$$

$$h = \frac{1600}{200.96} = 7.96cm$$

تمرین

1- مساحت کلی و حجم استوانه‌های زیر را محاسبه کنید:



2- هرگاه شعاع قاعدهٔ یک استوانه 3 برابر شود، حجم آن به کدام اندازه تغییر می‌کند؟

3- یک ذخیرهٔ آب که شکل استوانه را دارد شعاع قاعدهٔ آن 5m و ارتفاع آن 8m است. در این ذخیرهٔ آب چند متر مکعب آب جا می‌گیرد؟

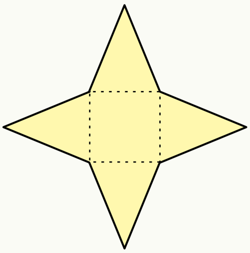
4- هرگاه ارتفاع یک استوانه دو برابر شود، اندازهٔ سطح جانبی آن چه تغییری می‌کند؟

مساحت وحجم هرم



آیا تا به حـال فکر کرده‌اید که چند سال طول کشـید تا مصری‌ها اهرام مصر را اعمار کردند؟

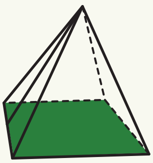
فعالیت



- شکل مقابل را روی یک کاغذ رسم کنید.
- اگر رأس‌های مثلث‌ها را با هم وصل کنید، چه شکلی به دست می آید؟
- با توجه به شکل، آیا می‌توانید روشی را برای پیدا کردن مساحت سطوح جانبی هرم بیان کنید؟

از فعالیت فوق تعریف زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

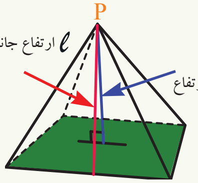
تعریف



هرم یک جسم هندسی چند وجهی است که قاعدۀ آن یک مضلع و سطوح جانبی آن مثلث‌ها بوده و در یک رأس مشترک اند.

مساحت سطوح جانبی مساوی است؛ به مجموع مساحت‌های مثلث‌هایی که وجه جانبی آن را تشکیل نموده است؛ بنابر آن:

مساحت سطوح جانبی $s=\frac{1}{2}\times nb\ell$



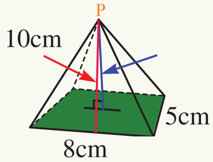
n عبارت از تعداد اضلاع قاعده، b عبارت از قاعدۀ مثلث است که ارتفاع جانبی بالای آن ترسیم می گردد و l ارتفاع جانبی هرم می‌باشد.

مساحت سطوح جانبی + مساحت قاعده = مساحت کلی هرم

یا $A=B+S$

ارتفاع هرم قطعه خطی است که از رأس هرم بر قاعدۀ آن عمود باشد.

مثال: طول، عرض و ارتفاع جانبی هرم در شکل زیر داده شده است مساحت کلی آن را حساب کنید.



حل: چون قاعده هرم مستطیلی است و چهار وجه دارد، پس:

$$S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8cm\cdot 10cm \quad , \quad S=160cm^2$$ مساحت سطوح جانبی هرم

چون قاعده هرم مستطیلی است، پس:

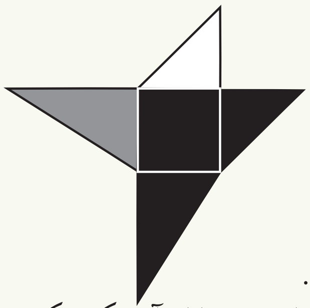
$$B=8cm\cdot 5cm=40cm^2$$ مساحت قاعده هرم

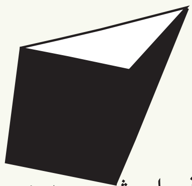
$$A=S+B\Rightarrow A=160cm^2+40cm^2$$

$$A=200cm^2$$

فعالیت

• سه قطعه کاغذ سفید را در نظر گرفته و شکل مقابل را در هر کدام آن رسم کنید.

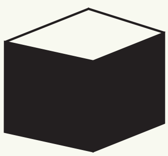


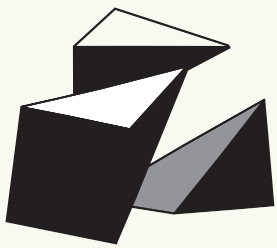


• هر سه قطعه کاغذ را برش و سه هرم از آن بسازید.

• هرم‌های به دست آمده را طوری کنار همدیگر قرار دهید تا از آن یک مکعب به دست آید؟

• حجم مکعب و حجم هرم را باهم مقایسه کنید.

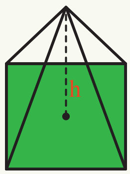




از فعالیت فوق نتیجه می‌گیریم:
که حجم مکعب مستطیل سه چند حجم هرم است یا حجم هرم $\frac{1}{3}$ حجم مکعب مستطیل است.

حجم هرم $= \frac{1}{3}$ حجم مکعب مستطیل

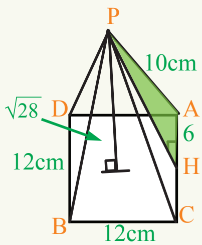
اگر حجم هرم را به V ارتفاع آن را به h و مساحت قاعدهٔ آن را به B نشان دهیم، پس حجم هرم مساوی است به:



حجم هرم $V = \frac{1}{3} B \cdot h$

مثال: درهرم مربعی زیر، طول ضلع قاعده و ارتفاع هرم داده شده است. مساحت کلی و حجم آن را حساب کنید.

حل: چون قاعدهٔ هرم مذکور مربعی است، پس مساحت آن:



مساحت قاعده $B = a^2 \Rightarrow B = 12 \cdot 12 = 144 cm^2$

حال باید ارتفاع PH (ارتفاع وجه جانبی) را دریافت کرد:
در مثلث قایم‌الزاویه PAH داریم:

$$\overline{PA}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{PH}^2$$

$$10^2 = 6^2 + \overline{PH}^2 \Rightarrow \overline{PH} = l = 8cm$$

$$S = \frac{1}{2} n \cdot b \cdot l$$

چون هر چهار سطح آن از مثلث‌ها تشکیل شده است.

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12cm \cdot 8cm$$

$$S = 4 \times \frac{1}{2} (12 \times 8) cm^2$$

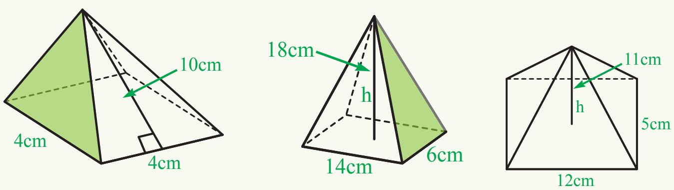
$$= 2(96) cm^2 = 192 cm^2$$

مساحت کلی $A = S + B = 192 + 144 = 336 cm^3$

$$V=\frac{1}{3}\cdot 144cm^2\cdot\sqrt{28}cm$$
$$V=\frac{1}{3}\cdot 144cm^2\cdot 5.29cm$$
$$V=\frac{1}{3}\cdot 761.76cm^3$$
$$V=253.92cm^3$$

تمرین

1- حجم هرمی را دریافت کنید که قاعدۀ آن مربعی بوده، طول ضلع آن 40m و ارتفاع آن 27m باشد.
2- چند مترمکعب هوا داخل خیمه‌یی به شکل هرم مربع القاعده موجود است؟ در صورتی که طول ضلع مربع 7m وارتفاع هرم 5m باشد.
3- حجم اشکال زیر را دریافت کنید:



مساحت و حجم مخروط



آیا تا به حال فکر کرده اید که یک مخروط از دوران کدام نوع مثلث به دور یک ضلع آن پدید می آید؟

تعریف

مخروط قایم جسمی است که از دوران یک مثلث قایم الزاویه به اطراف یکی از اضلاع قایم آن حاصل می‌شود. قطعه خطی که رأس مخروط را به مرکز قاعدهٔ آن وصل می کند به نام محور مخروط یاد می‌شود. اگر محور بر قاعده عمود باشد مخروط قایم و در غیر آن مایل نامیده می‌شود. مساحت سطح جانبی و کلی مخروط توسط فورمول زیر به دست می‌آید:

$S = \pi r l$ مساحت جانبی، ℓ طول مولد مخروط است. $A = B + S = \pi r^2 + \pi r \cdot l = \pi r(r + l)$

فعالیت

- یک جسم استوانه‌یی و یک جسم مخروطی را که قاعده و ارتفاع مساوی داشته باشند، بسازید. جسم مخروطی را از سرمه ریگ پر کرده و در جسم استوانه‌یی خالی کنید.
- با چند مخروطی پر از سرمه ریگ استوانه به شکل کامل پر می گردد.
- حجم استوانه و حجم مخروط چه رابطه‌یی با هم دارند؟

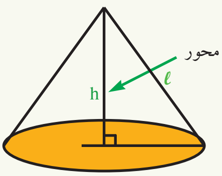
از فعالیت فوق داریم که:

حجم استوانه سه چند حجم مخروط است؛ پس حجم مخروط $\frac{1}{3}$ حصه حجم استوانهٔ است که دارای عین قاعده و ارتفاع باشند.

حجم مخروط $V = \frac{1}{3}$ حجم استوانه

چون $\pi r^2 h$ حجم استوانه است، پس:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$$



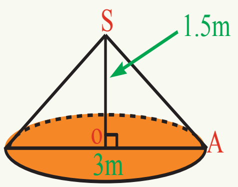
مثال 1: یک‌خرمن گندم مخروطی شکل دارای ارتفاع $1.5m$ و قطر قاعدۀ $3m$ است. مساحت کلی آن را دریافت نمایید.

حل: $r = 1.5m$ ، $d = 3m$ ، $h = 1.5m$

چون قاعدۀ مخروط دایروی است؛ پس:

مساحت قاعده $B = \pi r^2 = 3.14(1.5)^2 = 7.065m^2$

حال برای دریافت مساحت سطح جانبی باید وتر مثلث قایم‌الزاویه را حساب کنید:



$$\overline{SA}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OS}^2$$

$$\overline{SA}^2 = (1.5m)^2 + (1.5m)^2 = 4.5m^2$$

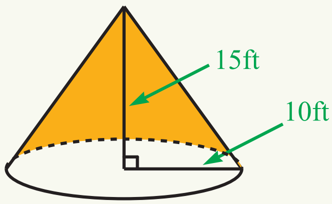
$$\overline{SA} = 2.12$$

$$S = \pi r \ell = 3.14 \times 1.5 \times 2.12$$

$$S = 4.17 \times 2.12 = 9.9852m^2$$

مساحت کلی $A = B + S = 7.065 + 9.9852 = 17.0502m^2$

مثال 2: حجم مخروط زیر را محاسبه کنید:



حل: $r = 10\,ft$ ، $h = 15\,ft$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h = \frac{1}{3} \times 3.14(10)^2 \times 15$$

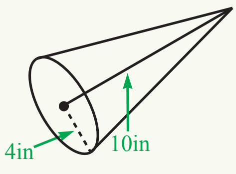
$$V = \frac{1}{3} \times 4710 = 1570$$

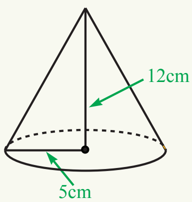
$$V = 1570ft^3$$

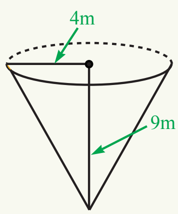
تمرین

1- تودۀ ریگ مخروطی شکل دارای ارتفاع $2m$ و قطر $4m$ است، حجم ریگ آن را محاسبه کنید.

2- شعاع قاعده و ارتفاع هر مخروط داده شده است. حجم هر یک را حساب کنید.







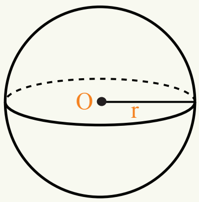


مساحت و حجم کره

آیا اشکالی و یا اجسامی در اطراف شما وجود دارد که شکل دایروی یا کروی داشته باشند؟ نام بگیرید.

تعریف

کره، جسمی است که تمام نقاط آن از یک نقطهٔ ثابت متساوی الفاصله باشد. نقطهٔ ثابت را مرکز و فاصله بین نقطه ثابت و تا سطح کره را به نام شعاع کره می‌نامند. اگر مساحت را به A و حجم را به V نشان دهیم داریم:



مساحت کره $A = 4\pi r^2$

حجم کره $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

مثال 1: مساحت سطح و حجم کره‌یی را دریافت نمایید که قطر آن $10cm$ باشد.

حل:

$d = 10cm$

$r = \frac{d}{2} = \frac{10cm}{2} = 5cm$

مساحت کره: $A = 4\pi r^2 = 4 \times 3.14 \times (5)^2$

$= 12.56 \times 25 \Rightarrow \quad A = 314cm^2$

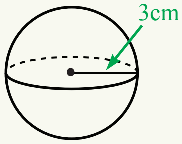
حجم کره: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (5)^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 125 = \frac{4}{3} \times 392.5$

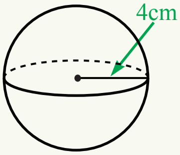
$= \frac{1570}{3} = 523.33cm^3$ ، $V = 523.33cm^3$

مثال 2: حجم هر یک از کره‌های زیر را که اجزای آن در شکل داده شده‌اند حساب کنید:

جزء a)



جز b)



حل: جزء a)

$$r = 3 \quad , \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (3)^3$$

$$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 27 = \frac{4}{3} \times 84.78 \quad \Rightarrow \quad V = 113.04cm^3$$

حل: جزء b)

$$r = 4 \quad , \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (4)^3$$

$$V = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 64 = \frac{4}{3} \times 200.96 \quad \Rightarrow \quad V = 267.946cm^3$$

تمرین

1- مساحت یک کره 36π سانتی متر مربع است.

الف: شعاع کره را به دست آورید. ب: حجم کره را محاسبه کنید.

2- در جدول زیر شعاع کره داده شده است، حجم و مساحت کره را محاسبه نموده و تحت ستون مربوطه در جدول آن بنویسید:

r	6cm	$6\times\frac{3}{4}cm$	9cm	12cm	314cm
A					
V					

3- اگر شعاع کره 2 برابر شود، حجم و مساحت آن چگونه تغییر می کند؟

نکات مهم فصل ششم

• مکعب مستطیل

یک شش وجهی منظم هندسی است که همه سطوح آن مستطیل شکل بوده و مساحت‌های هر وجه مقابل آن دو به دو مساوی و موازی، زوایای مقابل آن دو به دو با هم قایمه باشند. اگر طول مکعب مستطیل را به ℓ، عرض آن را به w و ارتفاع آن به h ارائه نماییم داریم:

مساحت جانبی آن عبارت است از: $S = 2(wh + h\ell)$

مساحت قاعدتین آن عبارت است از: $B = 2w\ell$

مساحت کلی آن عبارت است از: $A = 2(\ell w + \ell h + wh)$

حجم مکعب مستطیل: $V = \ell \times w \times h$

• مکعب

مکعب مستطیل که هر سه بعد(طول، عرض و ارتفاع) آن باهم مساوی باشند، آن را مکعب می‌نامیم. اگر مساحت آن را به A و حجم آن را به V نشان دهیم داریم که:

$A = 6a^2$

$V = a^3$

• منشور

جسم منظم هندسی است که سطوح متقابل آن با هم مساوی و موازی بوده و زوایای سطوح متقابل آن با هم انطباق پذیر اند.

• استوانه

استوانه قایم از دو قاعدهٔ انطباق پذیر و یک سطح جانبی که بر قاعده‌ها عمود اند تشکیل شده است. اگر حجم را به V و مساحت را به A نشان دهیم داریم که:

$A = 2\pi r(r + h)$

$V = \pi r^2 \times h$

• هرم

هرم یک چند وجهی هندسی است که قاعدهٔ آن یک مضلع منظم و سطوح جانبی آن مثلث‌ها بوده و در یک رأس مشترک‌اند.

مساحت سطوح جانبی + مساحت قاعده= مساحت کلی هرم

$A=B+S$

ارتفاع هرم قطعه خطی است که از رأس هرم بر قاعده آن عمود باشد.

$V = \frac{1}{3} B \times h$

• مخروط

مخروط قایم جسمی است که از دوران یک مثلث قایم‌الزاویه به اطراف یکی از اضلاع قایم آن حاصل می‌شود. قطعه خطی که رأس مخروط را به مرکز قاعدهٔ آن وصل می‌کند به نام محور مخروط یاد می‌شود. اگر محور مخروط بر قاعدهٔ آن عمود باشد مخروط قایم و در غیر آن مایل نامیده می‌شود.

$$A = \pi r^2 + \pi r \times \ell$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$$

• کــره

جسمی است که تمام نقاط آن از یک نقطهٔ ثابت متساوی الفاصله باشد. نقطهٔ ثابت را مرکز و فاصله بین نقطه ثابت تا سطح آن را به نام شعاع کره می‌نامند. اگر مساحت کره را به A و حجم کره را به V نشان دهیم داریم:

$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

تمرین عمومی

• برای هر سؤال زیر چهار جواب داده شده است، دور جواب صحیح را حلقه بکشید:

1- اگر محور استوانه بر قاعدهٔ آن عمود باشد، زاویهٔ زیر را می‌سازد:

a) حاده b) منفرجه

c) قایم d) a و b درست است.

2- ارتفاع هرم، قطعه خطی است که از رأس برقاعده آن:

a) موازی باشد b) مایل باشد

c) عمود باشد d) هیچ کدام

3- اگر ارتفاع یک مخروط که قاعدهٔ آن دایروی است $20cm$ و شعاع قاعدهٔ آن $10cm$ باشد حجم آن عبارت است از:

a) $2093.3cm^3$ b) $2093.3cm^2$

c) $209.33cm^2$ d) $209.33cm^3$

4- اگر ابعاد یک مکعب مستطیل به ترتیب 3، 2 و 1 سانتی متر باشد طول قطر AC عبارت است از:

a) 2 b) $\sqrt{14}$

c) $\sqrt{1}$ d) 6

5- فضایی را که یک جسم اشغال می‌کند به نام چه یاد می‌شود؟

a) وزن جسم b) حجم جسم

c) کتله جسم d) هر سه درست است

• جاهای خالی زیر را با کلمات مناسب پر کنید:

1- مکعب مستطیل که طول، عرض و ارتفاع آن مساوی باشد عبارت از .... است.

2- مکعب مستطیل یک........................... منظم هندسی است که همه ....
آن مکعب مستطیل شکل بوده و .... سطوح آن دو به دو با هم قایم باشند.

3- استوانهٔ قایم جسمی است که از دو قاعدهٔ .... انطباق پذیر و ....
که بر قاعده‌ها عمود اند تشکیل شده است.

4- حجم هرم .... حصه حجم............بوده که دارای عین قاعده و .... اند.

5- مخروط قایم جسمی است که از دوران یک مثلث .... به اطراف یک از .... قایم آن حاصل می‌شود.

• کدام یک از جمله‌های زیر صحیح و کدام یکی آن غلط است؟ در مقابل جملهٔ صحیح حرف (ص) و در مقابل جملهٔ غلط حرف (غ) بگذارید:

1- (   ) در یک منشور با جمع کردن مساحت‌های دو قاعده با مساحت کلی مساحت

سطح جانبی به دست می‌آید.

-2 (   ) اگر استوانه به امتداد محور قطع و باز گردد یک هرم حاصل می‌شود.

-3 (   ) اگر طول مکعب مستطیل a ، عرض آن b و ارتفاع آن c باشد حجم آن عبارت از abc است.

-4 (   ) کره جسمی است که تمام نقاط آن از یک نقطهٔ ثابت متساوی‌الفاصله باشد.

-5 (   ) حجم مخروط $\frac{1}{5}$ حصهٔ حجم استوانهٔ است که دارای عین قاعده و ارتفاع باشد.

• سؤال‌های زیر را حل کنید.

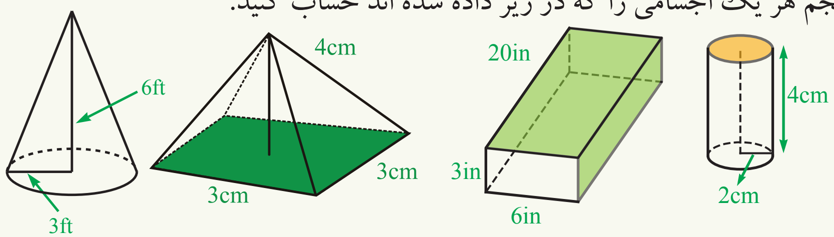
-1 حجم و مساحت کلی مکعب‌هایی را که خط رأس آن قرار زیر داده شده است دریافت کنید:

$a)\ 24m$ $\quad b)\ \sqrt{9}m$ $\quad c)\ 3\frac{3}{5}m$ $\quad d)\ 4\sqrt{27}$

-2 قوطی شیر پودری که شکل استوانه‌یی دارد دارای شعاع قاعده $6cm$ و ارتفاع $12cm$ است. مساحت کلی و حجم آن را دریافت نمایید.

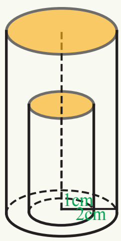
-3 چند متر مکعب هوا داخل خیمهٔ مربع القاعده موجود است، در صورتی که طول ضلع مربع و ارتفاع هرم $5m$ باشد.

-4 حجم هر یک اجسامی را که در زیر داده شده اند حساب کنید.



-5 دو کره به ترتیب دارای شعاع‌های $1cm$ و $2cm$ هستند.

الف: مساحت هر کدام از آن‌ها را پیدا کنید.   ب: حجم هر یک را به دست آورید.



-6 با توجه به شکل مقابل، دو استوانهٔ قایم را در نظر بگیرید که مرکز قاعده‌های آن‌ها یکی باشد، طوری که شعاع استوانهٔ بزرگ 2cm و استوانهٔ کوچک 1cm باشد.

الف: نسبت مساحت سطح جانبی استوانهٔ بزرگتر و مساحت سطح جانبی استوانهٔ کوچک‌تر را دریابید.

ب: نسبت حجم استوانهٔ بزرگ‌تر و حجم استوانهٔ کوچک‌تر چقدر است؟

-7 زمین که تقریباً به شکل یک کره است، شعاع آن 6400 کیلو متر می‌باشد.

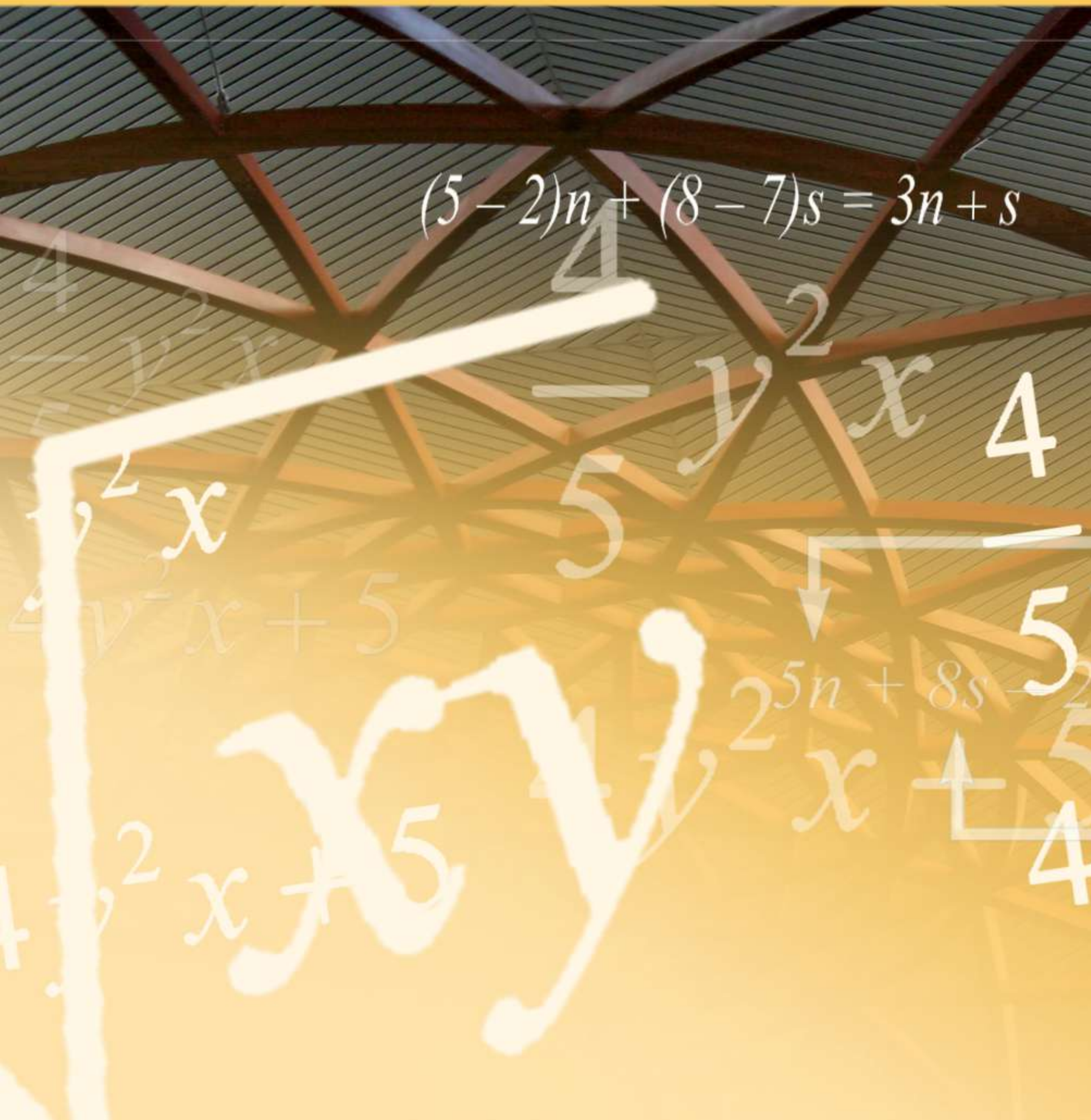
الف: مساحت سطح زمین را محاسبه کنید.

ب: حجم کرهٔ زمین را محاسبه کنید.

فصل هفتم

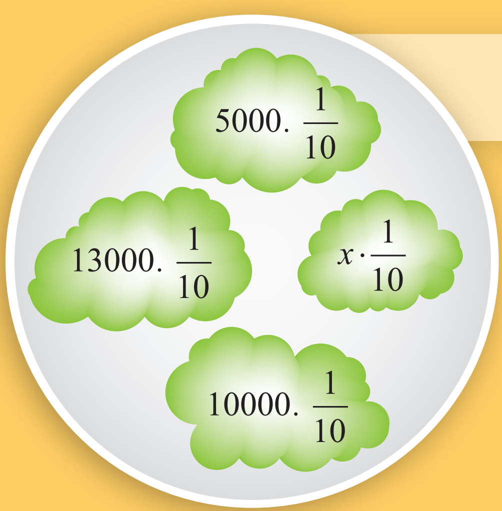
افاده‌های الجبری




$(5-2)n+(8-7)s=3n+s$

مفهوم متحول

یک نفـر $\frac{1}{10}$ درآمد خـود را به فقرا می‌دهد، این خبـر را چگونه می‌توانیم به زبان ریاضی اعلان کنیم؟



فعالیت

جدول زیر را تکمیل کنید:

طول ضلع مربع	2	1	3	10	$\frac{1}{10}$	9
محیط مربع	4×2					
مساحت مربع			3×3			

- $4\times a$ یعنی چه؟ برای ساده کردن $4\times a$ را به شکل $4a$ می‌نویسیم.
- آیا می‌توان مساحت هر مربع را به شکل a^2 نشان داد؟
- آیا می‌توان برای نشان دادن مساحت مربع از حرف دیگر استفاده کرد؟
- اگر محیط را به P و مساحت را به S نشان دهیم، قاعده‌یی برای پیدا کردن محیط و مساحت مربع دریافت کنید.
- محیط و مساحت مربعی به ضلع 4 واحد با قرار دادن 4 به جای a به دست بیاورید.
- آیا می‌توان به جای a هر عدد مثبت دیگر را قرار داد؟ این عدد مثبت چه‌چیزی را نشان می‌دهد؟

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

برای بیان کلی قاعده و یا قانون از حروف می‌توان استفاده کرد. با در نظر داشت این که قیمت‌های مختلف را می‌توان به جای حروف قرارداد که در این حالت حروف را متحول

می‌نامیم.

مثال 1: یک عدد a به علاوهٔ عدد 5 را به یک افاده نوشته و مقادیر آن را برای 5 , 3- $a=2$ محاسبه کنید.

حل: افادهٔ فوق عبارت است از $a+5$ که برای قیمت‌های مختلف a جدول زیر را ترتیب می‌دهیم:

a	2	−3	5
a + 5	2 + 5 = 7	−3 + 5 = 2	5 + 5 = 10

مثال 2: جملهٔ "حاصل ضرب یک عدد ضرب در خودش مساوی است با همان عدد به توان 2". این عبارت را به یک افاده نوشته و با دو مثال عددی نشان دهید.

حل: افادهٔ حروفی عبارت است از: $a\times a=a^2$

اگر $a=2$ باشد؛ پس: $2\times 2=2^2=4$ است.

اگر $a=\frac{1}{2}$ باشد؛ پس: $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$ می‌شود.

تمرین

جمله‌های زیر را با انتخاب حروف مناسب به صورت افادهٔ حرفی نشان دهید و برای هریک 3 مثال عددی بیاورید.

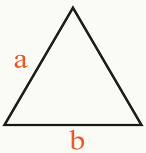
- هر عدد به توان یک مساوی به خود عدد است.
- یک به توان هر عدد مساوی به یک است.
- هر عدد به توان صفر مساوی به یک است.
- صفر به توان هر عدد مساوی به صفر است.
- اندازهٔ حجم یک مکعب مساوی به اندازهٔ ضلع آن به توان 3 می‌باشد.
- آیا می توانید رابطه‌های دیگری مثل روابط فوق بنویسید؟ دو مثال بیاورید.



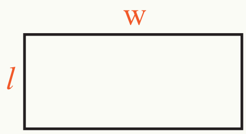
افاده‌های الجبری

یک بانک اعلام کرد که نرخ ربح سالانهٔ بانک 10% است. ناصر با خود فکر کرد که چقدر سرمایه را به چه مدت در بانک بگذارد تا سرمایه مذکور با مفادش دو برابر شود؟

فعالیت



- در مثلث متساوی‌الساقین مقابل، اندازهٔ ساق را به a و قاعده را به b نشان می‌دهیم. چرا هر دو ساق را به a نشان می‌دهیم؟
- محیط مثلث را با یک فورمول بنویسید. آن را برای $a=4$ و $b=5$ محاسبه کنید.



- محیط و مساحت مستطیل را به صورت یک فورمول بنویسید.
- مساحت و محیط مستطیل را برای $w=\frac{3}{4}$ و $l=\frac{2}{3}$ به دست آورید.

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

افاده‌هایی مثل $2a+b$ ، $3a-b$ ، $4a$ ، $\frac{4a-b}{2}$ و a^2 و $\sqrt{4a}$ را که از ترکیب عملیه‌هایی چون: جمع، تفریق، ضرب تقسیم، توان و جذر با اعداد از یک یا چند متحول تشکیل شده باشند، افاده‌های الجبری(عبارت‌های الجبری) می‌نامند. قیمت عددی یک افادهٔ الجبری را برای قیمت‌های مختلف متحول می‌توان دریافت کرد.

مثال 1: قیمت افادهٔ‌الجبری $2b$ را به قیمت‌های داده شدهٔ $b=\frac{3}{2}, 4, -3, -2, 2$ دریافت کنید.

حل:

b	2	4	-2	-3	$\frac{3}{2}$
2b	$2 \times 2 = 4$	$2 \times 4 = 8$	$2 \times (-2) = -4$	$2 \times (-3) = -6$	$2 \times \frac{3}{2} = 3$

مثال 2: اگر ربح سالانهٔ یک بانک 10% باشد. قاعده‌یی که بانک برای پرداخت ربح به سرمایه گذاران می‌دهد آن را به صورت افادهٔ الجبری بنویسید.

حل: اگر ربح را به P، سرمایه را به A، نرخ را به r و مدت را به t نشان دهیم؛ پس می توان نوشت:

$$P = A \times R \times T$$

تمرین

1- قیمت عددی هر افادهٔ الجبری را به قیمت‌های داده شده حساب کنید.

a	2	-5	3
b	$-\frac{1}{2}$	9	5
$b(a+7)$			

x	1	6	-2
$x-\frac{1}{2}$			

2- پروین هر روز چند صفحهٔ از کتاب تاریخ را می خواند. اگر پروین در یک روز x صفحه کتاب را بخواند، تعداد صفحاتی که پروین در یک هفته می‌خواند با یک افادهٔالجبری نشان دهید.

ساده کردن افاده‌های الجبری

مریم گفت: دو کتابچه داشتم، سه کتابچهٔ دیگر پدرم برایم خرید حال 5 کتابچه دارم.

کبیر گفت: من هم سه کتابچه داشتم، 2 قلم برایم پدرم خرید. چه می‌توانم بگویم؟

x : کتابچه

y : قلم

$$2x + 3x = 5x$$

$$3x + 2y = ?$$

فعالیت

عبارت‌های زیر را ساده و تکمیل کنید.

$5\times3+2\times3=(5+2)\times3=7\times3$

$8\times0.5-2\times0.5=(.....-.....)\times...=.....\times.....=.....$

2  +3  =(.....+.....)  = ... 

4  +3  +2  =(.....+.....+.....)  =..... 

$2a+3a=(.....+.....)a=.....a$

$-3y+4y=(.....+.....)y=.....y$

$2ax+3ax=(.....+.....)\times ax=.....ax$

- در ساده کردن عبارت‌های فوق از کدام خاصیت استفاده کردیم؟
- آیا می‌توانید  2+  3 یا $3x+2y$ را ساده یا جمع کنید؟
- آیا می‌توان افاده $2b+3b$ را ساده یا جمع نماییم؟

از فعالیت فوق می توان چنین نتیجه گرفت:

در افاده‌های الجبری بالا $-3y$، $2a$ و $2ax$ افاده یک حده الجبری گفته می‌شود. حدود که تنها تفاوت آن‌ها در ضریب‌های آن باشند؛ یعنی ضرایب آن متفاوت ولی حروف و توان‌های حروف یکسان باشند، حدود مشابه گفته می‌شوند. برای ساده کردن افاده‌های الجبری حدود مشابه را مد نظر می گیریم و تنها این حدود مشابه را می‌توان جمع و تفریق کرد.

مثال 1: افادهٔ زیر را ساده کنید:

$$5n+8s-2n-7s$$

حل: چون تنها تفاوت $5n$ و $-2n$ در ضریب‌های است که در متحول ضرب می‌شود پس حدود مشابه هستند به همین ترتیب $-7s$ و $8s$ نیز با هم مشابه اند که در زیر نشان داده شده اند.

$$5n+8s-2n-7s=(5-2)n+(8-7)s=3n+s$$

چون s و $3n$ با هم مشابه نیستند. پس عبارت را بیشتر از این نمی‌توان ساده کرد.

مثال 2: افاده‌های $5xy^2+4yz-8$ و $xy^2+3yz+8$ را جمع کنید.

$$\begin{array}{r} 5xy^2+4yz-8 \\ +\quad xy^2+3yz+8 \\ \hline 6xy^2+7yz \end{array}$$

تمرین

1- افاده‌های الجبری زیر را ساده کنید:

$a)\ 5a+7d-4a+3d$

$b)\ 8c+3k+5k-8k$

$c)\ 3d+2c+4d+3c-5d$

$d)\ 4b-5-3b+2$

$e)\ 9xy-7x+5-x^2+2xy+2x^2-2$

$f)\ 3a^2-7a-2-5a^2+3a+17$

$$g)\ \begin{array}{r} 3x^2+6xy+4y \\ +\ -x^2+4xy+9y \\ \hline \end{array}$$

$$h)\ \begin{array}{r} 3xy-2yz+4zx \\ +\ -2xy+yz+32zx \\ \hline \end{array}$$

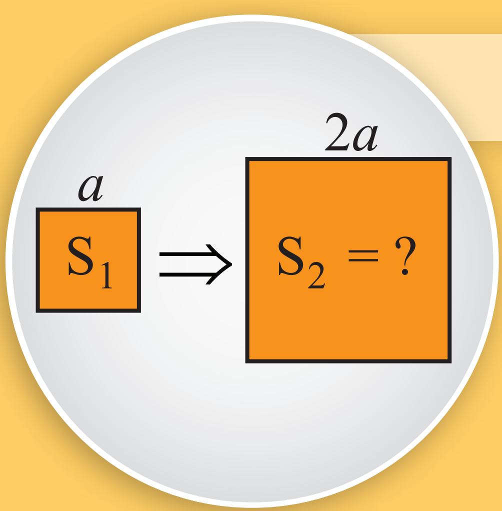
2- کدام یک از افاده‌های زیر با هم مشابه‌اند:

$a)\ -4x^2y\ ,\ 2x^3y^3$

$b)\ 3xy^2\ ,\ 8x^3y$

$c)\ 3x^2\ ,\ 9x^2$

ضرب افاده‌های یک حده



مربعی به ضلع a داریم اگر ضلع‌های مربع دو برابر شود، نسبت مساحت مربع اول بر مربع دوم چند است؟

فعالیت

تساوی‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$(3x^3y^2)\cdot(2x^2y) = (3\times2)x^3y^2 \cdot x^2y = 6x^{3+2}y^{2+1} = 6x^5y^3$$

$$(4a^2b)\cdot(6ab^2) = (4\times6)a^2b\cdot ab^2 = 24a^3b^3$$

- در این حاصل ضرب از کدام خاصیت عملیهٔ ضرب و قاعدهٔ ضرب طاقت‌ها استفاده شده است؟
- ضریب عددی عوامل ضربی طرف چپ مساوات و ضریب عددی افادهٔ الجبری طرف راست مساوات باهم چه رابطهٔ دارند؟
- توان‌های هریک از متحول‌ها در دو افادهٔالجبری با هم چه رابطه دارند؟

- با در نظرداشت قواعد فوق افاده‌های زیر را ساده سازید:

$$3x^2y^3z^2\times4x^2y^3z = \ldots$$

$$-9x^3a^2\times\frac{1}{5}ya^3 = \ldots$$

در فعالیت بالا افاده‌های چون $3x^3y^2, 2x^2y, 6ab^2, 4a^2b$ را که از ضرب عدد در متحول با توان‌های طبیعی یا صفر تشکیل شده اند یک حده و عددی را که در متحول‌ها ضرب می‌شوند به نام ضریب یک حده یاد می کنند.

در ضرب یک حده‌ها باید ضرایب آن‌ها را در همدیگر ضرب کنیم و توان‌های متحول‌های مشابه را با هم جمع کنیم.

مثال 1: افاده‌های الجبری $-4ab\ ,\ 6b^3$ را با هم ضرب کنید.

حل:
$$(-4ab)(6b^3)=(-4\cdot 6)abb^3=-24ab^4$$

مثال 2: کدام یک از افاده‌های الجبری زیر یک حده اند؟

$a)\ \frac{4}{5}y^2x$

$b)\ 4y^2x+5$

$c)\ \frac{4y^2}{x}$

$d)\ \sqrt{xy}$

حل: c،a و d هر یک، یک حده اند.

تمرین

حاصل ضرب یک حده‌های زیر را حساب کنید:

$a)\ (-5x^2ay)\times(3ax)$

$b)\ (-2xy^2z)\times(x^2z)$

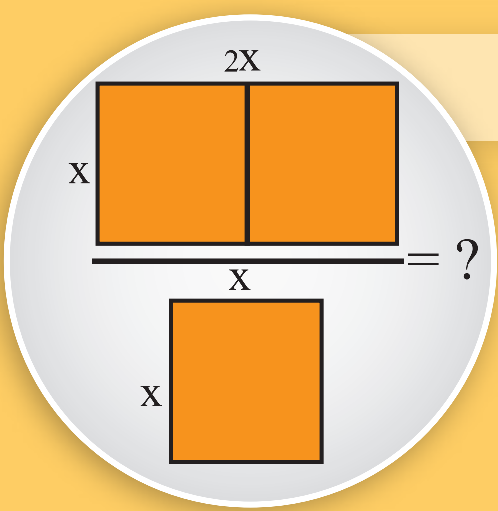
$c)-2xy^2\times(-3a^2)$

$d)\ (-3x^2)\times(-5xy^2)$

$e)\ (-\frac{1}{3}x^2y)\times(-\frac{1}{2}xy^3)$

تقسیم افاده‌های یک حده

مساحت مستطیل به طول 2x و عرض x، چند برابر مساحت مربع به طول x است؟



فعالیت

جاهای خالی را پر کنید.

$$\frac{3y^5}{y^2} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{3y^5}{y^2} = \dfrac{3y^{\square}\, y^{\square}}{y^2} \\[2ex] \dfrac{3y^5}{y^2} = 3y^{\square - \square} = 3y^{\square} \end{array} \right.$$

$$\frac{6x^5y^5}{7x^2y^3} \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{6x^5y^5}{7x^2y^3} = \dfrac{6x^{\square}\, x^{\square}\, y^{\square}\, y^{\square}}{7x^2y^3} = \dfrac{6}{7}x^{\square}\, y^{\square} \\[2ex] \dfrac{6x^5y^5}{7x^2y^3} = \dfrac{6}{7}x^{\square - \square}\, y^{\square - \square} = \dfrac{6}{7}x^{\square}\, y^{\square} \end{array} \right.$$

• دو روش تقسیم یک حده‌ها را با هم مقایسه کنید. در هر روش از چه خاصیت‌ها استفاده کرده ایم.

• ضریب توان‌های متحول در دو طرف راست و چپ با هم چه رابطه دارند؟

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

در تقسیم یک حده‌ها از قاعدهٔ ساده کردن کسرها استفاده می‌شود. ابتدا ضریب عددی یک حده‌ها را بالای یکدیگر تقسیم نموده و حدهای باقیمانده را با استفاده از قوانین طاقت ساده می کنیم.

مثال 1: یک حدهٔ $-20x^4y^3z$ را بر یک حدهٔ $5x^3y^2z$ تقسیم می کنیم.

حل:

$$\frac{-20x^4y^3z}{5x^3y^2z}=\frac{-20}{5}\times\frac{x^4}{x^3}\times\frac{y^3}{y^2}\times\frac{z}{z}$$
$$=-4xy$$

مثال 2: افاده الجبری $\frac{12x^3+8x^2}{2x}$ را ساده کنید.

حل:

$$\frac{12x^3+8x^2}{2x}=\frac{12x^3}{2x}+\frac{8x^2}{2x}$$
$$=6x^2+4x$$

تمرین

ساده کنید:

$a)\ \frac{-a^4b^8}{a^4b^7}$

$b)\ \frac{a^4b^2}{a^6b^2}$

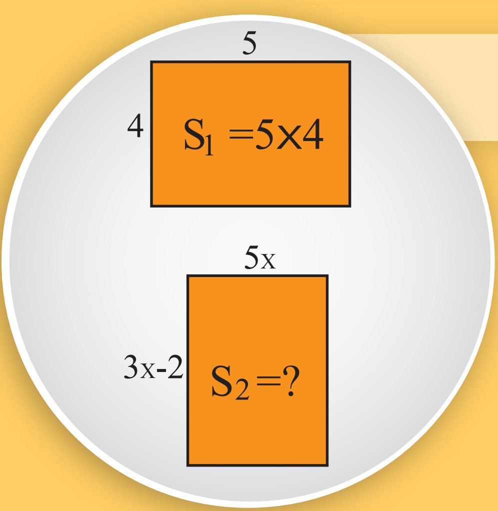
$c)\ \frac{10m^4}{30m}$

$d)\ \frac{-9c^4d^5}{-45c^3d^3}$

$e)\ \frac{6xy^2-3xy+2x^2y}{xy}$

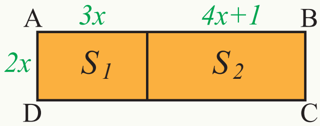
$f)\ \frac{4y^2+6}{2}$

ضرب افاده‌های الجبری



می‌دانیم مساحت یک مستطیل را که طول آن 5 سانتی متر و عرض آن 4 سانتی متر باشد چگونه پیدا کنیم. آیا مساحت مستطیلی را که طول آن 3x-2 و عرض آن 5x است نیز می‌توان پیدا کرد؟

فعالیت



شکل مقابل را در نظر بگیرید:

- مساحت مستطیل S_1 را با یک افادهٔ الجبری بنویسید.
- مساحت مستطیل S_2 را با یک افادهٔ الجبری بنویسید.
- مساحت مستطیل $ABCD$ را با یک افادهٔ الجبری بنویسید و آن را به S نشان دهید.
- چه رابطهٔ بین S , S_1 و S_2 وجود دارد؟

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

برای ضرب کردن افاده یک حده در یک افادهٔ الجبری از خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع می‌توان استفاده کرد.

مثال 1: حاصل ضرب یک حدهٔ $-5ax^2$ را در افادهٔ الجبری $x^2 - a^2$ به دست آورید.

حل:

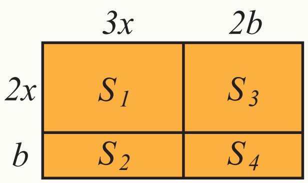
$$-5ax^2(x^2 - a^2) = (-5ax^2) \times x^2 + (-5ax^2) \times (-a^2)$$
$$= -5ax^4 + 5a^3x^2$$

مثال 2: $3a^2(a^3 - 2a^2 + 6a) = ?$

حل:

$$3a^2(a^3 - 2a^2 + 6a) = 3a^2(a^3) + [3a^2(-2a^2)] + 3a^2(6a)$$
$$= 3a^5 - 6a^4 + 18a^3$$

فعالیت



شکل مقابل را در نظر بگیرید:

- مساحت مستطیل S_1 را دریافت کنید.
- مساحت مستطیل S_2 را دریافت کنید.
- مساحت مستطیل S_3 را دریافت کنید.
- مساحت مستطیل S_4 را دریافت کنید.
- اگر طول مستطیل $3x+2b$ و عرض آن $2x+b$ باشد. مساحت مستطیل بزرگ را دریافت کنید و آن را به S نشان دهید.
- رابطه بین S، را با مجموع S_1، S_2، S_3 و S_4 بنویسید.

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

برای ضرب کردن دو افادهٔ الجبری، با استفاده از خاصیت توزیع‌پذیری ضرب بالای جمع، یک به یک تمام حدود افادهٔ اول را در حدود افادهٔ دوم ضرب می کنیم.

مثال 1: حاصل ضرب دو حدهٔ $x+2$ در دو حدهٔ $x-1$ را به‌دست آورید.

حل:

$$(x+2)(x-1)=x(x-1)+2(x-1)$$
$$=x^2-x+2x-2$$
$$=x^2+x-2$$

مثال 2: $(x+2)(x-2)$ را ساده کنید.

حل:

$$(x+2)(x-2)=x(x-2)+2(x-2)$$
$$=x^2-2x+2x-4$$
$$=x^2-4$$

مثال 3: حاصل ضرب دو حدهٔ $(x-2)$ را در سه حدهٔ (x^3+5x-7) به‌دست آورید.

حل:

$$(x-2)(x^3+5x-7)=x\cdot x^3+x\cdot 5x+x(-7)-2x^3-2(5x)-2(-7)$$
$$=x^4+5x^2-7x-2x^3-10x+14$$
$$=x^4+5x^2-2x^3-17x+14$$

تمرین

حاصل ضرب افاده‌های زیر را به دست آورید:

1) $-3n(2n^4-6n^2)$
2) $5ab(a^2-ab+b^2)$
3) $-9k^3(2k^2-4k-7)$
4) $(a+b)(x+y)$
5) $(x+1)(x^2-x+1)$
6) $(2a+3b)(2a-\frac{3c}{2})$

مطابقت‌ها
Identities

$$(10002)(9998)=?$$

$$(10000+2)(10000-2)$$

$$=(10000)^2-2^2$$

آیا می‌توانید یک راه ساده و مختصر را بـرای ضرب 10002×9998 دریافت کنید؟

فعالیت

در جدول زیر قیمت‌های دو افادهٔ الجبری A و B را برای قیمت‌های مختلف x دریافت کنید:

x	$A = 3x(2x-4)$	$B = 6x^2 - 12x$
3		
2		
-4		
0		
$\frac{1}{2}$		

چه رابطه بین A و B وجود دارد؟

• با دو مثال دیگر رابطهٔ به دست آمده را امتحان کنید.

از فعالیت فوق می‌توان رابطه بین A و B را به شکل زیر خلاصه کرد:

تساوی دو افادهٔ الجبری که برای تمام قیمت‌های متحول با هم مساوی باشند، یک مطابقت می‌نامیم.

فعالیت

• عملیهٔ ضرب اعداد مقابل را با درنظرداشت مطابقت انجام دهید.

a) $202 \cdot 198 = ?$

b) $104 \cdot 96 = ?$

c) $32 \cdot 28 = ?$

• جاهای خالی را پر کنید.

$a: \ (a+b)(a-b) = ... - ... + ... - ...$

$b: \ (a-b)(a+b) = ... + ... - ... - ...$

• در افاده‌های فوق قیمت $a = 200$ و قیمت $b = 2$ را در دو طرف قرار دهید. حاصل ضرب را با جزء a و جزء b مقایسه کنید.

• این بار $a = 100$ و $b = 4$ در دو طرف راست و چپ قرار داده حاصل ضرب را با جزء a و b مقایسه کنید.

از فعالیت فوق نتیجه می گیریم:

حاصل ضرب مجموع دو عدد در تفاضل همان دو عدد مساوی است با تفاضل مربع‌های آن دو عدد $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ که به نام تفاضل مربع‌ها می‌نامیم.

مثال: قوس‌های زیر را با هم ضرب و به شکل تفاضل مربع‌ها افاده کنید:

$a)\ (x-5)(x+5)$ $\qquad b)\ (5x^2y^2+7)(5x^2y^2-7)$

$c)\ (2a^2+5a)(2a^2-5a)$ $\qquad d)\ (\frac{x}{4}+1)(\frac{x}{4}-1)$

حل $a)$:

$$(x-5)(x+5) = x \times x + 5x - 5x - 5 \times 5$$
$$= x^2 - 25$$

$b)$:

$$(5x^2y^5+7)(5x^2y^5-7) = (5x^2y^5)^2 - 7(5x^2y^5) + 7(5x^2y^5) - (7)^2$$
$$= 25x^4y^{10} - 49$$

$c)$:

$$(2a^2+5a)(2a^2-5a) = (2a^2)^2 - (5a)^2$$
$$= 4a^4 - 25a^2$$

$d)$:

$$(\frac{x}{4}+1)(\frac{x}{4}-1) = (\frac{x}{4})^2 - (1)^2$$
$$= \frac{x^2}{16} - 1$$

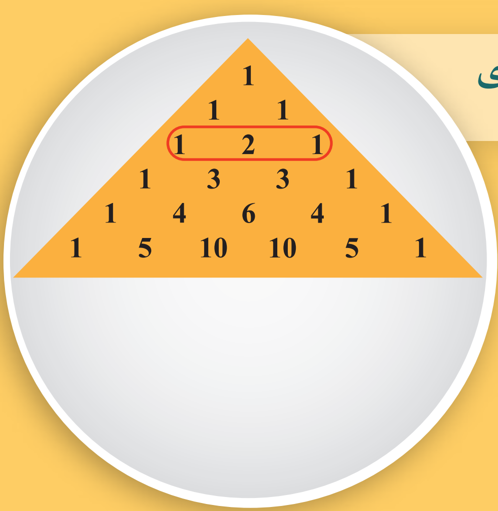
تمرین

قوس‌های زیر را با هم ضرب و به شکل تفاضل مربع‌ها افاده کنید.

$a)\ (P-7)(P+7)$ $\qquad b)\ (\frac{1}{x}+1)(\frac{1}{x}-1)$ $\qquad c)\ (x+2)(x-2)$

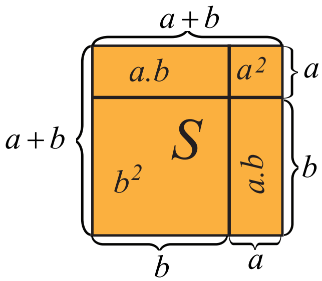
$d)\ (2x+5)(2x-5)$ $\qquad e)\ (49+1)(49-1)$ $\qquad f)\ (6x-y)(6x+y)$

مربع مجموع و تفاضل افاده‌های دو حده



مثلث عددی مقابل، به نام مثلث پاسکال مشهور است. سطر سوم مثلث چه چیزی را نشان می‌دهد؟

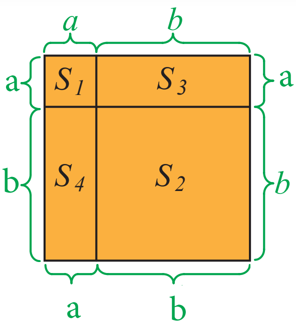
فعالیت



- طول هر ضلع مربع مقابل $a+b$ است.
- مساحت مربع را به S نشان دهید و قیمت آن‌را بنویسید.
- مربع اولی را به دو مربع با مساحت‌های a^2, b^2 و دو مستطیل با مساحت‌های a.b ، مانند شکل مقابل تقسیم و به S_1, S_2, S_3 و S_4 نامگذاری نمایید.
- مجموع مساحت مربع‌ها و مستطیل‌ها را بنویسید.
- مساحت مربع اولی با مساحت‌های مربع‌ها و مستطیل‌ها چه رابطهٔ دارد؟ بنویسید.
- رابطهٔ به دست آمده را با استفاده از خاصیت توزیعی ضرب بالای جمع نشان دهید.

از فعالیت فوق می‌توان بیان کرد:

مربع مجموع دو حد مساوی است به مربع حد اول جمع دو چند حاصل ضرب حد اول و دوم جمع مربع حد دوم؛ یعنی:



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال 1: افادهٔ $(x+3)^2$ را انکشاف دهید.

$$(x+3)^2 = x^2 + 2\times 3\times x + (3)^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

مثال 2: افادهٔ $(3x+5y)^2$ را انکشاف دهید.

حل: با استفاده از مطابقت $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ می‌توان نوشت:

$$(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5y) + (5y)^2$$
$$= 9x^2 + 30xy + 25y^2$$

مثال 3: $(x+\frac{1}{2})^2 = x^2 + 2\frac{1}{2}x + (\frac{1}{2})^2$

حل: هرگاه در مطابقت $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ به جای b، $(-b)$ را وضع نماییم مطابقت جدید را می‌یابیم.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$$

مربع تفاضل دو حد مساوی است به مربع حد اول منفی دو چند حاصل ضرب حد اول و دوم جمع مربع حد دوم مانند:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

مثال 4: $(x-1)^2$ را انکشاف دهید.

حل: با استفاده از مطابقت داریم:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(x-1)^2 = x^2 - 2(x)(1) + (1)^2$$
$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

مثال 5: $(8x-\frac{1}{3})^2$ را انکشاف دهید:

حل:

$$(8x-\frac{1}{3})^2 = (8x)^2 - 2(8x)(\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3})^2$$
$$= 64x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{1}{9}$$

تمرین

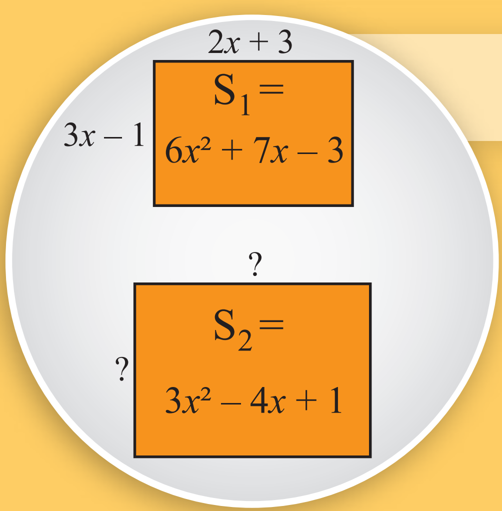
1- افاده‌های زیر را انکشاف دهید:

$a)\ (m+1)^2$ $\quad b)\ (x+7)^2$ $\quad c)\ (x+12)^2$ $\quad d)\ (x+\frac{3}{4})^2$

2- افاده‌های زیر را انکشاف دهید:

$a)\ (\frac{1}{x}-3)^2$ $\quad b)\ (12x-5y)^2$ $\quad c)\ (6xy-\frac{1}{2})^2$ $\quad d)\ (\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y)^2$

تجزیه افاده‌های الجبری



تاکنون توانستید مساحت مستطیل را به طول $2x+3$ و عرض $3x-1$ پیدا کنید.
آیا فکر کرده‌اید چگونه می‌توانید طول و عرض مستطیل به مساحت $3x^2-4x+1$ را دریافت کنید؟

فعالیت

جاهای خالی را در تساوی‌های مقابل با افاده مناسب پر کنید. $(2x-3)(2x+3) = \ldots - \ldots$

$(3y+\ldots)(3y-\ldots) = 9y^2 - a^2$

$(\ldots+\ldots)(\ldots-\ldots) = 4x^2 - 9$

$(4y-2x)^2 = \ldots - \ldots + 4x^2$

$(\ldots+2y)^2 = a^2 - 4ay + \ldots$

$(\ldots+\ldots)^2 = 4x^2 + 12x + 9$

در فعالیت فوق دیدیم که بعضی اوقات یک افادهٔ الجبری را به صورت ضرب دو افادهٔ الجبری می‌توان نوشت:

ارایه یک افادهٔ الجبری به شکل حاصل ضرب دو یا چند افادهٔ‌الجبری را تجزیه می‌نامیم.

مثال 1: افادهٔ الجبری $4-16x^2$ تجزیه کنید.

حل: با استفاده از مطابقت:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$(2)^2 - (4x)^2 = (2-4x)(2+4x)$$

مثال 2: افادهٔ الجبری $25a^2-4b^2$ را تجزیه کنید:

حل:

$$25a^2 - 4b^2 = (5a)^2 - (2b)^2$$
$$= (5a-2b)(5a+2b)$$

مثال 3: افادهٔ الجبری $x^2+12x+36$ را تجزیه می کنیم.

حل: می دانیم که:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$x^2+2\times x\times 6+(6)^2$$

دیده می‌شود که دو چند حاصل ضرب جذر مربع حد اول و سوم حد وسط را می‌دهد، پس افادهٔ فوق به شکل $(a+b)^2$ مطابقت دارد:

$$x^2+12x+36=(x+6)^2=(x+6)(x+6)$$

مثال 4: افادهٔ $4a^2+28a+49$ را به شکل حاصل ضرب دو قوس بنویسید.

حل:

$$(2a)^2+2\times 2a\times 7+(7)^2$$

دیده می‌شود که دو چند حاصل ضرب جذر مربع حد اول و سوم حد وسط را می‌دهد، پس افادهٔ فوق شکل مطابقت $(a+b)^2$ را دارد

در نتیجه:

$$4a^2+28a+49=(2a+7)^2=(2a+7)(2a+7)$$

مثال 5: افادهٔ الجبری x^2-4x+4 را به دو قوس تجزیه می‌نماییم.

حل:

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

$$x^2-2\times x\times 2+(2)^2$$

دیده می‌شود دوچند حاصل ضرب جذر حد اول و حد سوم حد وسط را می‌دهد، پس افادهٔ فوق شکل مطابقت $(a-b)^2$ را دارد:

در نتیجه:

$$x^2-2\times x\times 2+(2)^2=(x-2)^2=(x-2)(x-2)$$

تمرین

1- افاده‌های الجبری زیر را تجزیه کنید:

$a)\ 49x-16$ $\quad b)\ m^2-36$ $\quad c)\ 49-y^2$

$d)\ 25-x^2$ $\quad e)\ x^2y^2-64$ $\quad f)\ \dfrac{1}{64x^2}-y^2$

2- افاده‌های زیر را به اساس مطابقت $(a+b)^2$ و $(a-b)^2$ به دو قوس تجزیه نمایید.

$a)\ x^2+2xy+y^2$ $\quad b)\ x^2+6x+9$ $\quad c)\ 2a^2+4ab+b^2$

$d)\ 4x^2y^2+4xy+1$ $\quad e)\ b^2-12b+36$ $\quad f)\ 4a^2-12ab+9$

نکات مهم فصل هفتم

• مفهوم متحول

برای بیان قاعدهٔ عمومی از حروف می‌توان استفاده کرد. با در نظر داشت این که قیمت‌های مختلف را می‌توان به جای حروف قرار داد. در این حالت حروف را متحول می‌نامیم.

• حدود مشابه

حدهایی که دارای عین حروف بوده و توان‌های شان مساوی باشند، حدود مشابه گفته می‌شوند.

• افاده‌های الجبری

افاده‌های مثل $2a+b$, ab , $3x-4$, a^2 و $\sqrt{4a}$ که از ترکیب عملیه‌هایی چون: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، توان و جذر با اعداد از یک یا چند متحول تشکیل شده باشند. افاده‌های الجبری نامیده می‌شود. قیمت یک افادهٔ الجبری را می‌توان برای قیمت‌های مختلف متحول دریافت کرد.

• تعریف افادهٔ یک حده

اعداد و حروف الجبری که در آن عملیه ضرب، تقسیم، طاقت و جذر صورت گرفته باشد افاده یک حدهٔ الجبری نامیده می‌شود.

• ضریب افادهٔ یک حده

عددی که در متحول‌ها ضرب می‌شود ضریب یک حده می‌نامیم.

• ضرب افادهٔ یک حده

در فعالیت بالا افاده‌هایی چون $3x^3y^2, 2x^2y, 6ab^2, 4a^2b$ را که از ضرب عدد در متحول با توان‌های اعداد طبیعی یا صفر تشکیل شده اند یک حده و عددی را که در متحول‌ها ضرب می‌شود به نام ضریب یک حده یاد می‌کنند.

در ضرب یک حده‌ها باید ضرایب آن‌ها را در همدیگر ضرب کنیم و توان‌های متحول‌های مشابه را با هم جمع کنیم.

حد الجبری: یک افادهٔ الجبری که در حالت ضرب و یا تقسیم قرار داشته باشد یک حده الجبری را تشکیل می‌دهند.

مثلاً: $4a^2b$, $6ab^2$, $\frac{3y^2}{3x^2}$, $\frac{3abc}{c^2}$, $2x^2y$ و $\frac{3x^2y^2}{5ab}$

• تقسیم افاده‌های یک حده

در تقسیم افادهٔ الجبری یک حده‌ها از قاعدهٔ ساده کردن کسرها استفاده می‌شود. که ابتدا ضرایب را بالای یکدیگر تقسیم نموده و حدود باقی مانده را با استفاده از قوانین توان‌ها، ساده می‌سازیم.

مطابقت

• تساوی دو افادهٔ الجبری که برای تمام قیمت‌های متحول برقرار است، مطابقت می‌نامیم.

• حاصل ضرب مجموع دو عدد در تفاضل همان دو عدد مساوی است با تفاضل مربع‌های آن دو عدد.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

• مربع مجموع دو حد مساوی به مربع حد اول جمع دو چند حاصل ضرب حد اول و دوم جمع مربع حد دوم می‌باشد:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

• مربع تفاضل دو حد مساوی می‌باشد به مربع، حد اول منفی دو چند حاصل ضرب حد اول و دوم جمع مربع حد دوم می‌باشد:

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

تمرینات عمومی

1- سؤال‌های زیر را به دقت خوانده برای هر سؤال چهار جواب داده شده است. جواب درست را انتخاب نموده و دور آن را حلقه بکشید.

• یک عدد ضرب در خودش جمع 6 عبارت است از:

$a)\ x^2-6$ $\quad b)\ x+6$ $\quad c)\ x^2+6$ $\quad d)$ هیچ کدام

• حاصل ضرب $-5ab(4ac)$ عبارت است از:

$a)\ -20a^2bc$ $\quad b)\ 20a^2bc$ $\quad c)\ 20ab^2c$ $\quad d)\ 20a^2bc^2$

• حاصل تقسیم $\frac{4m^2n^2}{-4m^3n^2}$ عبارت است از:

$a)\ m^{-1}$ $\quad b)\ \frac{-1}{m}$ $\quad c)\ -m^{-1}$ $\quad d)$ جواب b و c درست است

• قیمت عددی افادهٔ $6x^3-\frac{1}{2}$ در صورتی که $x=\frac{1}{2}$ باشد عبارت است از:

$a)\ -\frac{1}{4}$ $\quad b)\ 4$ $\quad c)\ 4^{-1}$ $\quad d)\ \frac{1}{4}x$

• m^2-9n^2 مساوی است به:

$a)\ (m-3n)(m+3n)$ $\quad b)\ (m-3n)(m-3n)$

$c)\ (m+3n)(m+3n)$ $\quad d)$ هیچ کدام

2- جاهای خالی را با کلمات و اعداد مناسب پر کنید:

• برای ساده کردن افاده‌های الجبری .... را با هم جمع وتفریق می کنیم.

• $(a+b)^2=.....+2ab+b^2$

• یک افادۂالجبری که از ضرب اعداد حقیقی و ....های مختلف با توان‌های اعداد تام یا عدد حقیقی تشکیل شده باشد یک حده است.

• عددی که در متحول‌ها .... می‌شوند. ضریب یک حده می‌نامیم.

3- افاده‌های زیر را ساده کنید:

$a)\ 2b(-3c)^2$ $\quad b)\ (-6xy^2)(-ax^2y^2)$ $\quad c)\ -3b^2(-2ab)(6a^2b)$

$d)\ -2a(-3ab)^2$ $\quad e)\ 4y^2(6xy)$ $\quad f)\ (-2a^3)(-5ab^2)$

4- کسرهای زیر را ساده کنید:

$a)\ \frac{12x^2y^4}{2xy^3}$ $\quad b)\ \frac{3ab}{-3a}$ $\quad c)\ \frac{16r^3s}{-2rs}$

$d)\ \frac{-15xyz}{-3xy}$ $\quad e)\ \frac{-5a^2b+10ab^2}{-5ab}$ $\quad f)\ \frac{6x^2-4x^2}{-2x^2}$

5- ساده کنید:

$a)\ 7a^3b^4c^2-8a^3b^4c^2$

$$b)\ \begin{array}{r} 5x+y \\ +\ 3x-2y \\ \hline \end{array} \qquad c)\ \begin{array}{r} 4a+5b-2c \\ +\ 4a-3b-2c \\ \hline \end{array}$$

6- دو حده‌های زیر را تجزیه کنید:

$a)\ x^2-1$ $\quad b)\ x^2y^2-64$ $\quad c)\ \frac{4a^2}{b^2}-25$

$d)\ m^2-16a^2$ $\quad e)\ x^2-\frac{1}{4}$ $\quad f)\ \frac{1}{4}a^2-\frac{1}{9}b^2$

$g)\ 121-y^2$ $\quad h)\ \frac{25a^2}{b^2}-\frac{36a^2}{d^2}$ $\quad i)\ \frac{81}{a^2}-\frac{b^2}{49}$

7- افاده‌های زیر را با استفاده از مطابقت ساده کنید:

$a)\ (\frac{1}{2}+z)(\frac{1}{2}-z)$ $\quad b)\ (\frac{a}{5}+\frac{1}{b})(\frac{a}{5}-\frac{1}{b})$ $\quad c)\ (5a+2b)(5a-2b)$

8- افاده‌های الجبری زیر را انکشاف دهید:

$a)\ (m+1)^2$ $\quad b)\ (y-2)^2$ $\quad c)\ (x+\frac{3}{2})^2$

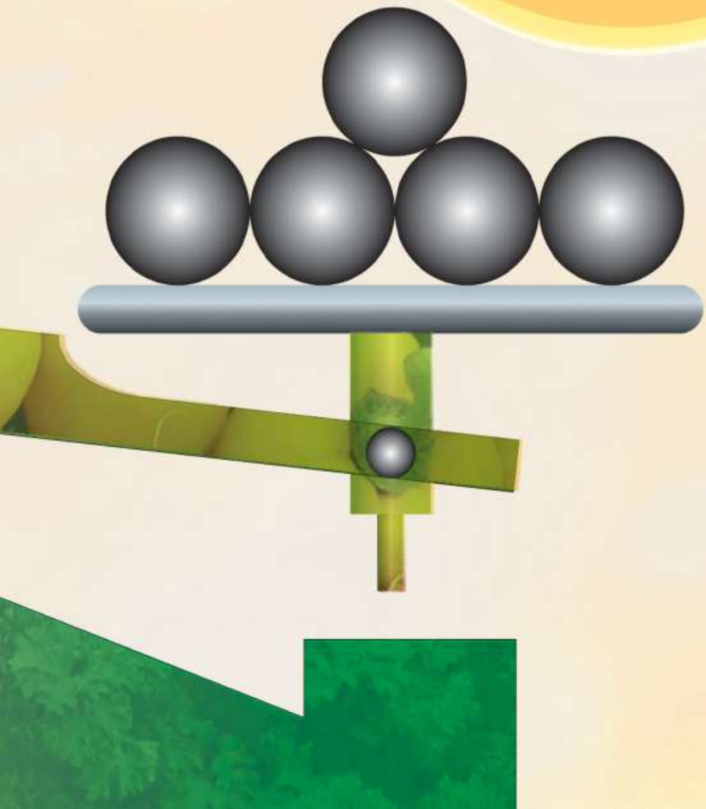
$d)\ (b-\frac{5}{2})^2$ $\quad e)\ (a+7)^2$ $\quad f)\ (m+\frac{1}{4})^2$

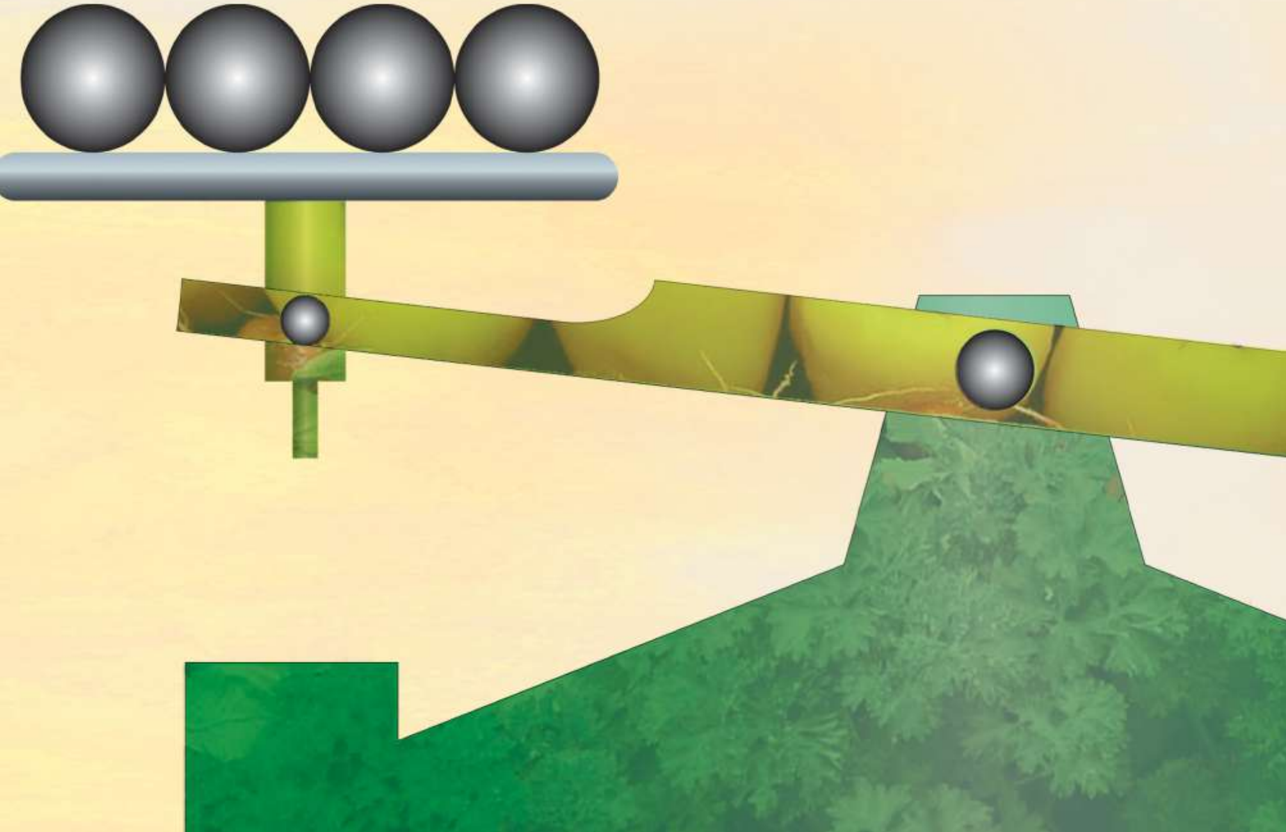
9- افاده‌های الجبری زیر را تجزیه کنید:

$a)\ 4x^2y^2-9z^4$ $\quad b)\ x^2-8x+16$ $\quad c)\ a^2x^2+4axy+4y^2$

فصل هشتم

معادلات





مفهوم معادله



مسکا: مینا ! چقدر پول در دست خود دارید؟

مینا: اگر از دو چند پولی که در دست دارم 2 افغانی کم گردد مساوی به 20 افغانی می‌شود.

مسکا: فهمیدم که در دست خود چند افغانی دارید.

مینا: چطور فهمیدی که من در دست خود چند افغانی دارم؟

فعالیت

زلمی می‌خواست از یک دکان یک کیلو بوره بخرد. دکاندار تنها وزن‌های 100گرامه، 150 گرامه، 250 گرامه، نیم کیلویی و 2 کیلویی داشت.

• چگونه برای زلمی، دکاندار یک کیلو بوره را وزن نماید؟ کدام یک از روش‌های زیر برای اندازه کردن یک کیلو بوره درست است؟

– دکاندار اول نیم کیلو بوره را وزن نموده، بعد وزنهٔ نیم کیلویی را با نیم کیلو بورهٔ وزن شده در یک پلهٔ ترازو گذاشته و یک کیلو بوره را در پله دیگر ترازو وزن می کند.

– دکاندار 2 کیلو بوره را وزن نموده، بعد 2 کیلو بورهٔ وزن شده را در هر دو پلهٔ ترازو نصف کند.

• شما چی روشی دیگری را برای اندازه کردن یک کیلو بوره با استفاده از وزن‌های موجود می‌توانید پیشنهاد نمایید؟

• در پایان هر روش هر دو پلهٔ ترازو در چی حالتی قرار دارند؟

• محتویات هر دو پلهٔ تراوز در پایان هر روش با هم چه نسبتی دارند؟

• اگر در یک پلهٔ ترازو یک بسته وزن نا معلوم با یک وزنهٔیک کیلویی و در پلهٔ دیگر آن یک وزن نیم کیلویی و دو کیلویی در حال تعادل قرار داشته باشند، تعادل پله ها را با یک تساوی الجبری نشان دهید؟

• آیا می‌توانید حدس بزنید که وزن بسته چند است؟ به عبارت دیگر بستهٔ نامعلوم چقدر وزن داشته باشد تا تعادل ترازو حفظ گردد؟

در فعالیت بالا، وزن کردن یک کیلو گرام بوره و تعادل آن با وزن‌های گوناگون موجود،

نتیجهٔ زیر را برای مفهوم معادله به دست می‌دهد.

تعریف

• یک مساوات الجبری که یک متحول نامعلوم (مجهول) داشته باشد و برای بعضی از قیمت‌های مجهول صدق نماید به نام معادله و دریافت عددی که معادله الجبری را به یک مساوات عددی تبدیل نماید به نام حل و یا جواب معادله یاد می گردد.
• آن‌چه که در حل معادله سراغ آن می‌باشیم به نام مجهول معادله یاد گردیده که به طور اکثر آن را به x نشان می‌دهند.

مثال: اگر با یک عدد، عدد 5 جمع گردد مساوی به 15 می‌شود، عدد کدام است؟

حل: اگر عددی را که دنبال آن هستیم x بنامیم پس سؤال طوری است که اگر با x عدد 5 جمع شود مساوی به 15 می گردد؛ یعنی: $x+5=15$

کدام عدد است که با 5 جمع گردیده و در نتیجه عدد 15 حاصل گردد.

از حل کردن معادلهٔ فوق می توان گفت که عدد مساوی به 10 می‌باشد.

یعنی: $x=10$

حال به خاطر امتحان مسأله هرگاه قیمت دریافت شده را در معادلهٔ $x+5=15$ وضع نماییم؛ داریم:

$$x+5=15$$

$$10+5=15$$

$$15=15$$

چون تساوی عددی $15=15$ درست است؛ بنابر این پاسخی که به دست آورده ایم برای معادله درست می‌باشد.

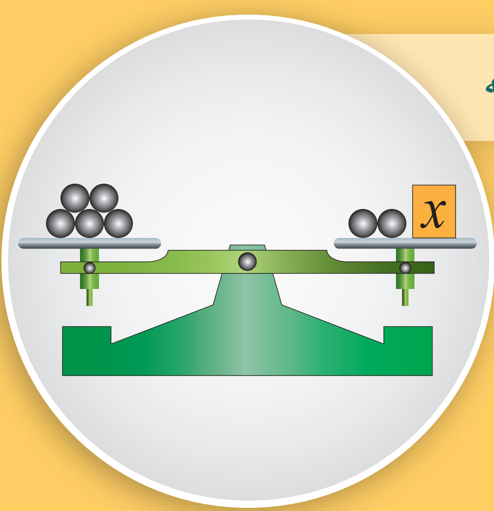
تمرین

1- اگر محیط یک مثلث متساوی الاضلاع مساوی به 9 واحد باشد، مطلوب است. معادله الجبری که از حل آن طول ضلع مثلث را دریافت نموده بتوانیم.

2- اگر با یک عدد، عدد 9 جمع گردد مساوی به 14 می‌شود، عدد چند است؟

3- معادله الجبری را برای گفتگو مسکا و مینا که در آغاز درس صورت گرفته است بنویسید.

عملیه‌های جمع و تفریق در معادله



اگـر یک وزن نامعلوم بـا دو گلوله در یـک طرف تـرازو و در طـرف دیگر آن 5 گلوله برابر و مسـاوی قرار داشته باشـند، وزن مجهـول مسـاوی به چند گلوله می‌باشد؟ چه فکر می کنید؟

فعالیت

تعادل ترازو در حالت فوق به معنای آن است که وزن اجسام قرار گرفته در هر دو پلهٔ ترازو باهم برابر است؛ پس اگر وزن نامعلوم طرف راست را x بنامیم به سؤال‌های زیر جواب دهید.

- تساوی الجبری برای تعادل این که 2 گلوله با وزن مجهول در یک پله و در پلهٔ دیگر ترازو 5 گلوله قرار داشته باشند؛ بنویسید.
- اگر از هر دو پلهٔ ترازو دوگلوله را برداریم آیا تعادل ترازو باقی می‌ماند؟
- آیا کم کردن گلوله ها از هر دو پلهٔ ترازو از نگاه ریاضی با عملیه ریاضی یکسان است؟
- نظر به این که با کم کردن گلوله‌ها تعادل بر هم نمی‌خورد؛ پس این عمل از نگاه ریاضی چه معنا دارد؟
- حال اگر به هر دو پلهٔ ترازو 4 عدد گلولهٔ هم وزن علاوه گردد چه اتفاقی می‌افتد؟

از اجرای فعالیت بالا نتیجهٔ زیر به دست می آید:

از پله‌های یک ترازوی در حال تعادل، اگر از هر دو طرف یک مقدار معین را کم و یا به هر دو پله یک مقدار مساوی را اضافه نماییم باز هم تعادل باقی می‌ماند.
به اصطلاح ریاضی اگر از طرفین یک تساوی عین عدد را کم و یا به طرفین آن عین عدد را جمع نماییم باز هم تساوی بر قرار می‌ماند؛ یعنی:
اگر $a = b$ باشد، پس برای هر عدد حقیقی c:
$a + c = b + c$ و $a - c = b - c$ می‌باشد.
از این خاصیت در حل معادلات استفاده به عمل می آید.

مثال 1: معادلهٔ $x+7=9$ را حل کنید.

حل: میدانیم که اگر از طرفین معادله عدد 7 را کم کنیم در تعادل معادله تغییر نمی آید، بنابراین:

$$x+7-7=9-7$$
$$x=2$$

امتحان: هر گاه قیمت دریافت شدهٔ x را در اصل معادله قرار دهیم داریم:

$$x+7=9$$
$$2+7=9$$
$$9=9$$

چون تساوی عددی بر قرار است، بنا بر این حل دریافت شدهٔ $x=2$ درست است.

مثال 2: حل معادلهٔ $x-5=4$ را به دست آورید.

حل: می‌دانیم که هرگاه به طرفین معادله، عددی را جمع نماییم، تعادل مساوات بر هم نمی‌خورد، بنا بر این، جمع نمودن عدد 5 به هر دو طرف معادله برای ما می دهد:

$$x-5+5=4+5$$
$$x=9$$

امتحان: قیمت دریافت شدهٔ x را در اصل معادله قرار می‌دهیم:

$$x-5=4$$
$$9-5=4$$
$$4=4$$

چون تساوی عددی $4=4$ وجود دارد؛ بنا بر این $x=9$ حل معادله می‌باشد.

تمرین

1- اگر با یک عدد 3 اضافه گردد 15 حاصل می‌شود؛ عدد کدام است؟

2- اگر از یک عدد 7 را تفریق نماییم 13 حاصل می گردد؛ عدد کدام است؟

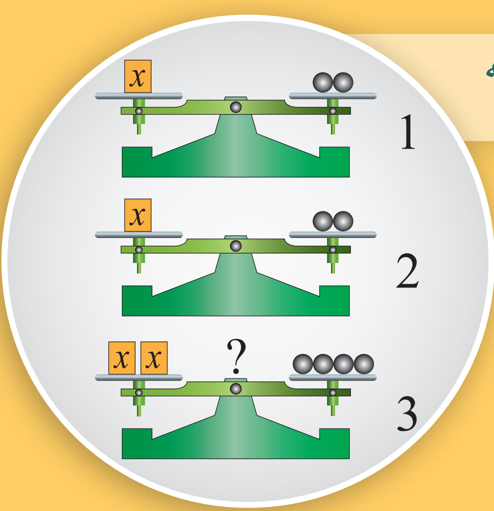
3- معادله‌های زیر را حل کنید.

$a)\quad x-6=2$

$b)\quad x+4=1$

$c)\quad 2+x=3$

عملیه‌های ضرب و تقسیم در معادله



دو ترازوی 1 و 2 با 2 گلولهٔ مساوی در یک طرف و در طرف دیگر آن یک وزن نامعلوم در حال تعادل قرار دارد.
هرگاه طرف به طرف گلوله‌ها را در یک پله و وزن‌های نامعلوم را در یک پلهٔ دیگر ترازوی شماره 3 قراردهیم جواب‌تان به سؤال زیر چیست؟
آیا ترازوی شماره سوم درحال تعادل خواهد ماند یا نه؟

فعالیت

ترازوی شماره 3 را در نظر می گیریم. دیده می‌شود که باز هم ترازو در حالی که در یک طرف آن دو وزنهٔ مجهول و در طرف دیگر آن 4 عدد گلولهٔ مساوی قرار دارند، در حال تعادل است. اگر وزن مجهول را x بنامیم به حل سؤال‌ها زیر فکر کنید.

- افادهٔ ریاضی و یا به‌عبارت دیگر، بیان الجبری برای تعادل ترازوی شماره 3 کدام است؟
- حال هرگاه دوباره گلوله‌ها و وزنه‌ها را به جای خود برگردانده نصف نماییم و دوباره یک قسمت را به ترازوی شماره 1 و قسمت دیگر را در همین ترازو باقی بمانیم، آیا در این صورت باز هم تعادل در ترازوهای شماره 1 و 3 وجود خواهد داشت؟
- نصف نمودن گلوله و وزنه‌ها از نگاه ریاضی چه معنا دارد؟
- آیا این فعالیت را برای بیشتر از 2 ترازو نیز می‌توانیم انجام دهیم؟

از فعالیت فوق می‌توانیم نتیجهٔ زیر را بیان نماییم:

هرگاه وزنه‌های هر دو طرف ترازو را به دو یا بیشتر از دو قسمت مساوی تقسیم یا ضرب نماییم ویا نصف وزن‌ها را از هر دو طرف ترازو برداریم باز هم تعادل باقی می‌ماند؛ زیرا وزن هر دو طرف ترازو با هم مساوی می‌باشند.

از نگاه ریاضی اگر طرفین یک تساوی را در عددی ضرب یا بر عددی خلاف صفر تقسیم نماییم، باز هم مساوات باقی می‌ماند به عبارت دیگر:

اگر $a=b$ باشد، پس برای هر عدد حقیقی c، $ac=bc$ می‌باشد.

و برای هر عدد حقیقی c خلاف صفر، $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$ می‌باشد.

مثال: مساوات $3x = 6$ را در نظر گرفته، حل آن را به دست آورید.

اطراف مساوات فوق را به 3 تقسیم نموده داریم:

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$$

امتحان: هرگاه قیمت $x = 2$ را در اصل معادله وضع نماییم؛ داریم:

$$3x = 6$$
$$3(2) = 6$$
$$6 = 6$$

دیده می‌شود که $x = 2$ حل دقیق مساوات فوق می باشد.

تمرین

معادلات زیر را حل کنید.

1) $4x = 2$

2) $\frac{x}{5} = 12$

3) $3x = -6$

4) $\frac{-2}{x} = -4$

5) $\frac{x}{2} = 4$

6) $\frac{4}{x} = -2$

7) $\frac{3x}{4} = \frac{2}{3}$

معادلهٔ عمومی یک مجهوله درجه یک

$$4x + 8 = 0$$

$$4x = -8$$

$$x = ?$$

معلم از شاگردان پرسید.
اگر بـا چهار چند یک عدد 8 علاوه گردد مساوی به صفر می‌شود، عدد کدام است؟

فعالیت

آیا برای حل سؤال معلم، که به صورت فوق مطرح کرده است فکر کرده اید؟

- اگر عدد مطلوب سؤال قبلی را x بنامیم، آیا می‌توانید سؤال فوق را بایک افادهٔ ریاضی بنویسید؟
- چگونه برای دریافت حل آن حدس می‌زنید؟
- اگر از 3 چند یک عدد، 9 منفی گردد نتیجه مساوی به صفر شود افادهٔ الجبری آن را بنویسید؟
- چگونه برای دریافت حل این معادله فکر می کنید؟
- اگر با a چند یک عدد، عدد b علاوه گردد نتیجه مساوی به صفر است عدد چند است؟ (a و b اعداد حقیقی و a خلاف صفر است.)

از انجام فعالیت بالا نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

در عملیات مانند فوق مقدار نامعلوم را به x نشان داده، می توان برای آن یک تساوی بر حسب x به دست آوریم.

تساوی طرفین را معادله و مقدار نامعلوم را به نام مجهول معادله یاد نموده و راه یافتن مجهول را به نام حل معادله یاد می کنند.

حالت عمومی معادله یک مجهوله درجه یک به شکل $ax+b=0$ بوده، که در آن a و b اعداد حقیقی خلاف صفر است؛ بنابر آن شکل فوق به نام حالت معیاری و یا ستندرد معادله خطی یاد می گردد.

حل معادله را توسط عملیات سادهٔ الجبری با انجام مراحل زیر به دست آورده می‌توانیم.
- جمع و یا تفریق طرفین معادله با مقدارهای مساوی.
- ضرب و یا تقسیم طرفین معادله با مقدارهای مساوی خلاف صفر.
با انجام عملیات فوق بعد از محاسبه به جایی می‌رسیم که، مجهول معادله به یک طرف و مقادیر معلوم در طرف دیگر قرار می گیرد و به این ترتیب حل معادله به دست می آید.

مثال 1: معادله $3x-4=5$ را حل کنید.

حل: ابتدا به طرفین معادله عدد 4 را جمع می کنیم:

$$3x-4+4=5+4 \Rightarrow 3x=9$$

طرفین معادله را بر 3 تقسیم می کنیم:

$$\frac{3x}{3}=\frac{9}{3} \Rightarrow x=3$$

مثال 2: معادلهٔ $2(3x+4)=-1-3x$ را حل کنید.

حل:

$$2(3x+4)=-1-3x$$

$$6x+8=-1-3x$$

$$6x+3x+8=-1-3x+3x \qquad / \ +3x$$

$$9x+8=-1$$

$$9x+8-8=-1-8 \qquad / \ -8$$

$$9x=-9$$

$$\frac{9x}{9}=-\frac{9}{9}=-1 \qquad / \ \div 9$$

$$x=-1$$

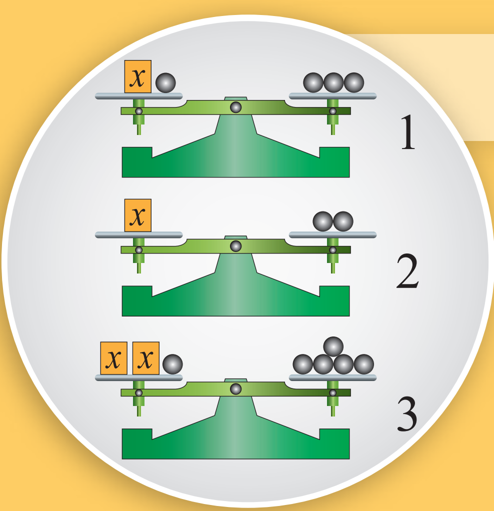
تمرین

1- در مثال فوق، قیمتی را که برای x به دست آورده اید؛ در اصل معادله امتحان کنید.

2- حل معادله $2(2x+3)=2x-2$ را به دست آورید؟

3- معادله $\frac{3}{2}(4x-2)=5x+2$ را حل کنید.

معادله‌های معادل



در ترازوهای شماره 1، 2، و 3 چه می‌بینید؟
هر سه ترازو در حالت تعادل قرار دارند.
چگونه حالت‌های تعادل دیگری را توسط افزایش یا کاهش وزنه‌های برابر و مساوی به طرفین پله‌ها که از آن در توازن پله‌های فوق استفاده شده است می‌توانید فکر کنید؟

فعالیت

جملهٔ زیر را در نظر بگیرید.
اگر از دو چند یک عدد، 4 کم گردد، مساوی به 8 است، عدد کدام است؟
هرگاه مجهول را x بنامیم در این صورت برای بیان فوق معادله را به شکل ذیل می‌توانیم بنویسیم.

$$2x-4=8$$

• با درنظرداشت معادلهٔ فوق فعالیت زیر را با پر کردن خانه‌های خالی جدول زیر انجام دهید.

حل‌ها	معادله به دست آمده	عملیه‌ها بالای طرفین معادله	شماره
	$2x-4=8$	معادله داده شده	1
		با طرفین معادلهٔ شماره ۱ عدد (-8) را جمع می‌کنیم	2
		طرفین معادلهٔ شماره ۱ را تقسیم ۲ می‌کنیم	3
	$x-6=0$	معادلهٔ شماره۱ را به شکل معیاری می‌نویسیم	4

• هر کدام از این معادلات را با اعمال سادهٔ الجبری به ترتیب زیر به دست آورید.
- از معادلهٔ شماره 1 ← معادلهٔ شماره 2 ← معادلهٔ شماره 3 ← معادلهٔ شماره 4

از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

معادلاتی که دارای حل های مساوی باشند، به نام معادلات معادل یاد می گردند.
انجام عملیات سادۀ الجبری بالای یک معادله، معادله‌های معادل را به وجود می آورد.
برای دریافت حل معادله سعی می گردد تا از روش دریافت معادله‌های معادل، معادلۀ به دست آید که شکل ساده تری برای دریافت مجهول معادله داشته باشد.

مثال: معادلۀ $2x-4=0$ را حل کنید.

حل: با اطراف معادله $+4$ را جمع می کنیم:

$$2x-4=0$$

$$2x-4+4=0+4$$

اطراف تقسیم 2 :

$$\frac{2x}{2}=\frac{4}{2}\Rightarrow x=2$$

امتحان: قیمت دریافت شده را در اصل معادلۀ $2x-4=0$ وضع می‌نماییم داریم که:

$$2\times 2-4=0$$

$$4-4=0$$

$$0=0$$

چون در تساوی، عدد $0=0$ است، بنا بر این $x=2$ حل معادله می‌باشد.
با وضع کردن قیمت دریافت‌شده در معادلۀ $2x=4$ می‌بینیم: $2\times 2=4$ ، پس $2x=4$
و $2x-4=0$ معادلات با هم معادل هستند.

تمرین

1- حل معادلات زیر را دریافت نموده امتحان کنید.

1) $\frac{(a-2)}{3}=3$

2) $2(2x-1)=4$

3) $\frac{2}{5}+x=1$

4) $16-3t=0$

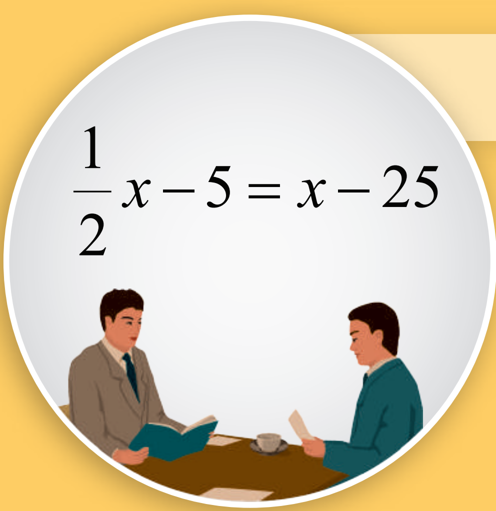
5) $3-4y=2-6y$

2- کدام یک از معادله‌های زیر با هم معادل استند؟

a) $\begin{cases} x+1=\frac{x}{2}+2 \\ \frac{x}{2}+1=x+2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x-4=8 \\ 2x-2=4 \end{cases}$

تشکیل معادلات



عثمان: فرهاد، تو چند ساله استی؟
فرهاد: اگر از نصف عمر پدرم عدد 5 کم گردد مساوی به سن من است. زمانی که من تولد شدم پدرم 25 سال عمر داشت.
عثمان: فهمیدم، عمر پدرت 40 وسن تو 15 سال است.
آیا می‌توانید بگویید که عثمان چگونه فهمید. که فرهاد چند ساله است؟

فعالیت

یک مسأله حسابی روزمره را به معادلهٔ الجبری تبدیل می‌نماییم و سعی می کنیم که در انجام فعالیت، شیوهٔ تشکیل معادله و حل آن را بیابیم.

- اگر با دو چند یک عدد، عدد 4 جمع شود مساوی به 16 می‌شود، عدد کدام است؟
- آیا مسأله را فهمیدید؟ چگونه می‌توانید آن را به یک معادلهٔ الجبری تبدیل نمایید؟
- بعد از تبدیل آن به معادلهٔ الجبری حل آن را به دست آورید.
- آیا حل تان درست است؟ امتحان کنید.

از فعالیت بالا نتیجهٔ زیر را به دست می آوریم:

برای تشکیل یک معادلهٔ الجبری و دریافت حل آن با در نظرداشت فعالیت فوق، مراحل زیر ضروری و اساسی پنداشته می‌شود.

– درک و فهمیدن
– انتخاب مجهول و نامگذاری
– تشکیل یک معادله با دقت به بیان
– حل مسأله، یا دریافت قیمت مجهول
– امتحان کردن مسأله با جواب دریافت شده

مثال: اگر با دو چند پول رشاد 20 افغانی اضافه گردد مساوی به پول خوشحال می گردد. اگر مقدار پول خوشحال 60 افغانی باشد، مقدار پول رشاد چند است؟

$$2x + 20 = 60$$

حل: برای تشکیل معادله و دریافت حل آن مرحله به مرحله به شکل زیر به حل مسأله می پردازیم.

– درک فهمیدن مسأله و خواندن آن باتمام دقت.

انتخاب مجهول، مقدار پول رشاد است که آن را x می‌نامیم.

– ساختمان معادله: با دو چند پول رشاد (2x) اگر 20 اضافه گردد (2x+20) مساوی به پول خوشحال می‌شود 2x+20=60

– حل معادله

$$2x + 20 = 60$$

از اطراف معادله (20) را کم می‌کنیم:

$$2x = 60 - 20 = 40$$

$$2x = 40$$

اطراف معادله تقسیم 2 :

$$\frac{2x}{2} = \frac{40}{2}$$

مقدار پول رشاد:

$$x = 20$$

امتحان: اگر با دو چند پول رشاد 20 افغانی اضافه گردد مساوی به پول خوشحال؛ یعنی 60 می‌شود که این مسأله هم درست است.

زیرا:

$$2(20) + 20 = 60$$

$$40 + 20 = 60$$

$$60 = 60$$

چون مساوات عددی $60 = 60$ است، بنابراین قیمت دریافت شده صحیح است.

تمرین

1– اگراز 3 چند یک عدد 5 تفریق گردد مساوی به 4 می‌شود، عدد کدام است؟

2– حاصل جمع سن لیمه و نیلوفر مساوی به 30 است، لیمه 2 سال بزرگتر از نیلوفر است. لیمه و نیلوفر چند سال دارند؟

نکات مهم فصل هشتم

• معـادله

عبارت از مساوات الجبری است که برای بعضی قیمت‌های معین مجهول، صدق می‌نماید و توسط روشی با استفاده از عملیه‌های الجبری با لای طرفین معادله مطلوب، مجهول معادله دریافت می گردد.

• عملیه‌های الجبری و معادله

اگر به اطراف هر معادله یک عدد را جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم (خلاف صفر) نماییم در معادله کدام تغییر وارد نمی‌شود.

• معادلهٔ یک مجهوله درجه یک

معادله $ax+b=0$ ، $a\neq 0$ ، در حالی که x مجهول(a و b اعداد حقیقی بوده) به نام معادلهٔ یک مجهوله درجه یک یاد می گردد.

معادله بالا به نام معادله خطی یک مجهوله نیز یاد می گردد و هر معادلهٔ خطی، دارای یگانه حل $x=-\frac{b}{a}$ ، $a\neq 0$ می باشد.

• معادلات معادل

معادله‌های که دارای حل‌های یکسان باشند، به نام معادله‌های معادل یاد می گردند. انجام عملیات سادهٔ الجبری بالای یک معادله، معادله‌های معادل را به وجود آورده که با معادلهٔ اولی حل یکسان دارد.

• تشکیل معادله خطی یک مجهوله

هر گاه بتوانیم مسایل حسابی روزمره را به قسم یک معادلهٔ الجبری تنظیم، تا از روی آن حل معادله را دریافت نماییم، این پروسه تشکیل معادلهٔ خطی یک مجهوله بوده که حل آن را به اختیار ما می گذارد. این مسأله به نام تشکیل سؤال‌های عبارتی توسط معادله‌ها نیز یاد می گردد.

تمرین عمومی

برای هر سؤال زیر چهار جواب داده شده است دور جواب صحیح را حلقه بکشید.

1- حل معادله $10 + x = 18$ عبارت است از:

a) -8 b) 8

c) 2 (d 4

2- حل معادله $12x + 2(5x + 22) = 0$ عبارت است از:

a) 0 b) 1

c) 2 d) -2

3- مراحل حل یک معادله عبارت است از:

a) درک و فهمیدن

b) انتخاب مجهول و نامگذاری

c) دریافت مجهول و امتحان

d) همه آن‌ها

4- معادل، معادله $3x - 6 = 3$ عبارت است از:

(a $3x - 2 = 1$

(b $x - 2 = 3$

(c $x - 2 = 1$

(d هیچ کدام

جاهای خالی را با کلمات و اعداد مناسب پر کنید.

1- یک مساوات الجبری که برای بعضی از .... مجهول ها صدق می نماید............. یاد می‌شود.

2- معادلاتی که دارای .... باشند، به نام .... یاد می گردند.

3- آن‌چه که در حل معادله سراغ آن می‌باشیم به نام .... یاد می گردد.

کدام یک از جمله‌های زیر صحیح و کدام یک آن غلط است، در مقابل جملهٔ صحیح حرف (ص) و در مقابل جملهٔ غلط حرف (غ) را بنویسید.

1 (   ) اگر از هر دو طرف پله‌های ترازو یک مقدار معین را کم و یا به هر دو طرف پلهٔ ترازو یک مقدار مساوی را اضافه نماییم باز هم تعادل باقی می‌ماند.

2 (   ) معادله‌های که دارای حل‌ها یکسان باشند، به نام معادلات غیر معادل یاد می‌گردند.

3 (   ) یک مساوات الجبری را که برای بعضی از قیمت‌های مجهول صدق نماید به نام معادله یاد می‌گردد.

4 (   ) اگر طرفین یک تساوی را در عدد ضرب یا بر عدد خلاف صفر تقسیم نماییم باز هم مساوات باقی می‌ماند.

سؤال‌های زیر را حل نمایید.

1- معادلات زیر را حل کنید.

$a)\ t+5=2$

$b)\ x-9=-5$

$c)\ x+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$d)\ x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

2- حل معادلات زیر مطلوب است:

$a)\ 6y=2$

$b)\ -3x=-4$

$c)\ \frac{x}{2}+1=2$

$d)\ \frac{3}{t}+1=2$

$e)\ 3(2x-1)=x$

$f)\ \frac{1}{2}(4x-1)=\frac{3}{2}$

3- اگر از 5 چند یک عدد 2 کم شود مساوی به 3 می‌شود، عدد کدام است؟

4- اگر با نصف یک عدد 4 اضافه گردد مساوی به 8 می‌شود، عدد کدام است؟

5- ارتفاع یک مثلث متساوی الساقین مساوی به 6 واحد است، طول قاعدهٔ مثلث چند واحد باشد که مساحت مثلث مساوی به 9 واحد مربع گردد؟

6- محمود 100 افغانی داشت 6 جلد کتابچه خرید، هر گاه از مقدار پول 25 افغانی هنوز باقی مانده باشد، معلوم کنید که محمود هر کتابچه را به چند افغانی خریده است؟

7- مجموع دو عدد 30 است اگر یکی آن‌ها 20 باشد عدد دومی چند خواهد بود؟

8- عدد 3 با کدام عدد ضرب شود تا حاصل ضرب مساوی به a شود؟

9- اگر فرق بین دو عدد 3 و مجموع آن‌ها 37 باشد اعداد را پیدا کنید.

فصل نهم

رابطه و تابع



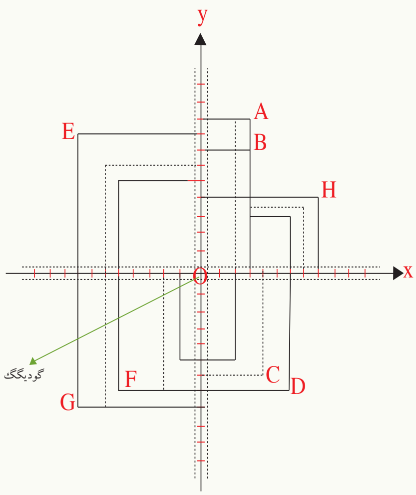


نقطه در مستوی



آسمان پر از ستاره است.
به طرف شمال، شرق، غرب و جنوب مهتاب، موقعیت ستاره‌ها را در چهار اطراف مهتاب چگونه مشخص می‌کنید؟

فعالیت



شکل مقابل را در نظر بگیرید. از نقطهٔ O خطوطی رسم شده‌اند که بالای یکدیگر در نقطهٔ O عمود و بالای آن‌ها به طرف بالا، پایین، راست و چپ با واحدات مساوی نشانی شده‌اند. سعی نمایید به طرف نقاطی که در صفحه داده شده اند به گودیگک مسیر داده فعالیت زیر را انجام دهید:

- از نقطهٔ O گودیگک را به نقطهٔ B مسیر دهید.
- آیا می‌توانید مسیر کوتاه دیگری از O به B دریافت کنید؟
- مسیرهای فوق از هم چه فرق دارند؟
- مسیری برای رسیدن به نقطهٔ F بدهید که فقط یک بار گودیگک تغییر جهت به طرف چپ داشته باشد.
- مسیری برای رسیدن به نقطهٔ F بدهید که فقط یک بار تغییر جهت به طرف راست داشته باشد.
- مسیرهای فوق را از روی کدام اعداد مشخص نموده می‌توانیم.
- به عوض مسیرهای راست و چپ ما از محور افقی، که نقطهٔ O بالای صفر منطبق باشد و

برای مسیرهای بالا و پایین نیز از محور عمودی، مانند شکل بالا نقطهٔ O با صفر منطبق باشد استفاده کنید و گودیگک را به نقاط C ، D ، G و H با در نظر داشت محورهای متقاطع اعداد مسیر بدهید.

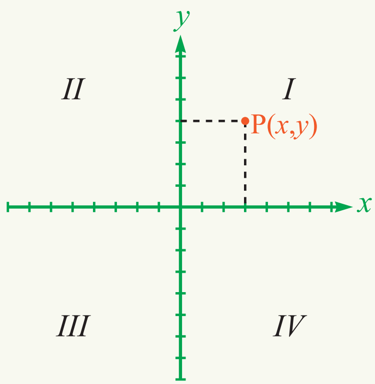
• جورهٔ اعدادی که برای هر نقطه به دست می‌آورید، توسط آن جدول زیر را تکمیل نمایید:

نقاط	A	B	C	D	E	F	G	H
روی محور افقی	3					–5		
روی محور عمودی				–7				6

از فعالیت بالا نتیجهٔ زیر را به دست می آوریم:

در فعالیت بالا دیدیم که ما نمی‌توانیم، نقطهٔ اختیاری یک صفحه را تنها توسط محور اعدادی که ما آن را می‌شناسیم تشخیص نماییم، بنابر این ضرورت به محور عمودی دیگری بالای آن می‌باشد که ما آن را در تعریف زیر به حیث یک سیستم دو محور قایم به هم معرفی می‌نماییم.

تعریف



دو محور x و y که بالای هم در نقطهٔ O عمود اند، به نام سیستم مختصات قایم یاد می گردد.

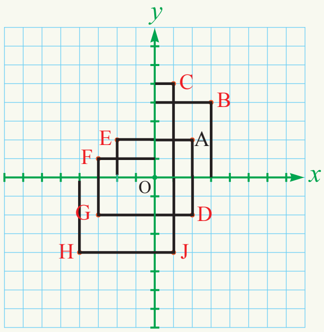
x به نام محور فاصله و y به نام محور ترتیب نام گذاری گردیده که هر جور مرتب (x,y) یک نقطهٔ P در مستوی سیستم مختصات را مشخص می کند، طوری که x به نام فاصله روی محور x و y به نام ترتیب نقطه روی محور y مشخص می گردد.

محورات سیستم مختصات، مستوی را به چهار ناحیهٔ I، II، III و VI تقسیم می‌نمایید.

یادداشت: دقت کنید نقاط $P(x,y)$ و $P'(x',y')$ از هم فرق دارند، مانند نقاط $A(3,1)$ و $A'(1,3)$ دو محل جداگانهٔ در مستوی می‌باشند.

نقطه $A(3,1)$؛ یعنی 3 واحد به طرف راست روی محور x و یک واحد به طرف بالا روی محور y و نقطهٔ $A'(1,3)$، یعنی 1 واحد به طرف راست و 3 واحد به طرف بالا روی محور y.

مثال: ترتیب و فاصله نقاط زیر را که در سیستم مختصات قایم داده شده‌اند، به حیث جورهٔ مرتب، به صورت تشریحی در یک جدول بنویسید:



حل: مختصات نقاط به حیث جوره‌های مرتب سیستم مختصات قایم عبارت‌اند از:

A(2,2)   B(3,4)   C(1,5)

D(2,–2)   E(–2,2)   F(–3,1)

G(–3,–2)   B(–4,–4)   J(1,–4)

طرز نوشتن و ترتیب جدول، برای نقاط فوق قرار زیر به دست می آید:

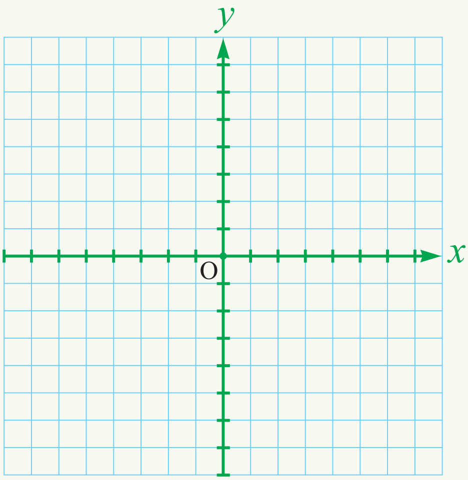
نقاط	A	B	C	D	E	F	G	H	J
x	2	3	1	2	–2	–3	–3	–4	1
y	2	4	5	–2	2	1	–2	–4	–4

تمرین

1– ارائه جدولی جوره‌های مرتب زیر را بنویسید.

A(5,5) , B(0,3) , C(–1,1) , D(2,–1)

2- نقاط $A(1,-1)$, $B(-3,1)$ ، $C(-1,-2)$, $D(-5,-3)$, $E(1,4)$ را در سیستم مختصات قایم مشخص کنید.



3- نقاط زیر را در سیستم مختصات قایم تعیین کنید:

a) $A(4,5)$

b) $B(-2,-4.5)$

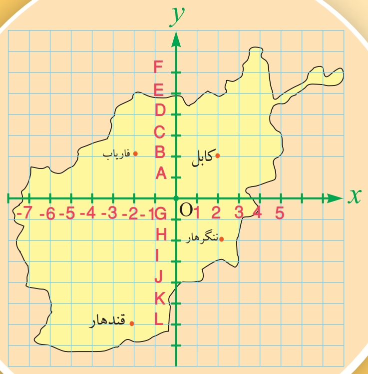
c) $G(0.5,4)$

d) $E(-7,0)$

e) $F(0,4.5)$

f) $K(0,0)$

مختصات یک نقطه در مستوی



چهار ولایت افغانستان در نقشه تعیین شــده اند، بگویید که در تقاطع کدام حرف و کدام عدد قرار دارند؟

آیا تقاطع هر حرف و عدد یک نقطه افغانستان را نشان می دهد؟

فعالیت

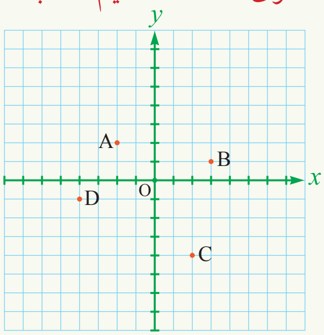
سیستم مختصات قایم را ترسیم کنید.

- محورها را به واحدهای یک سانتی متر تقسیم و هر واحد را به صورت ملی متری نشانی کنید.
- 4 نقطهٔ اختیاری را در چهار ناحیهٔ سیستم مختصات به صورت دلخواه نشانی نموده، سعی نمایید از روی خطوط عمودی و افقی به روی محورهای x و y مختصات آن را تعیین کنید.
- آیا حدس زده می‌توانید که دو نقطهٔ مختلف مستوی دارای جوره‌های مرتب مساوی باشند؟
- آیا امکان آن وجود دارد که برای دو جورهٔ مرتب از هم مختلف، محل نقاط در مستوی با هم یک جا یک نقطه باشد؟

از انجام فعالیت فوق نتیجهٔ زیر به دست می آید:

هر نقطهٔ P در مستوی مختصات قایم تنها یک جورهٔ مرتب اعداد (x, y) و بر عکس به هر جورهٔ مرتب اعداد (x, y) تنها و تنها به یک نقطهٔ P در مستوی مختصات قایم مطابقت می کند.

مثال: سیستم مختصات قایم زیر را در نظر بگیرید.



a) مختصات نقاطی را که در سیستم مختصات نشانی شده‌اند به شکل جورهٔ مرتب و جدولی بنویسید.

b) نقاط $A(1,2)$ ، $B(-3,4)$ ، $C(-2,-4)$ ، $D(2,-2)$ و $E(4,5)$ را در سیستم مختصات قایم مشخص نموده با هم وصل کنید.

حل:

a)

$A(-2,2)$

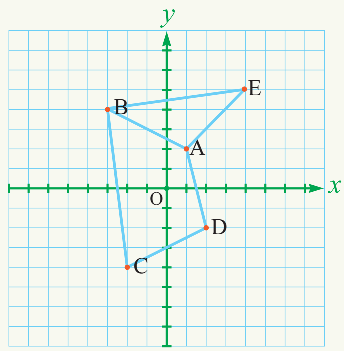
$B(3,1)$

$C(2,-4)$

$D(-4,-1)$

نقاط	A	B	C	D
x	-2	3	2	-4
y	2	1	-4	-1

b)



تمرین

1- نقاطی که مختصات آن توسط جوره‌های مرتب زیر داده شده‌اند در سیستم مختصات قایم مشخص نموده نقاط را به ترتیب با هم وصل کنید:

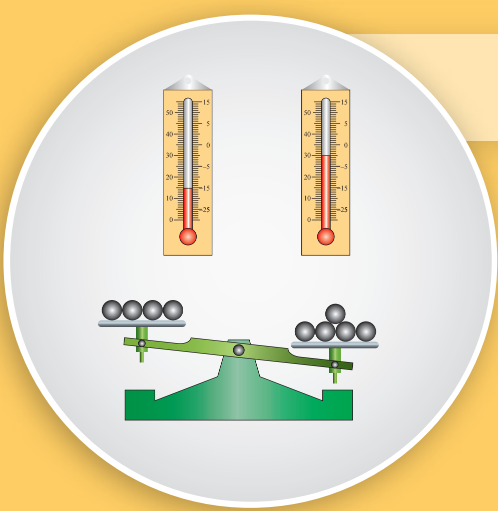
$P_1(1,1)$ ، $P_2(2,-3)$ ، $P_3(3,1)$ ، $P_4(4,-3)$ ، $P_5(6,-2)$ و $P_6(-4,-5)$

2- مختصهٔ نقاط زیر را دریافت کنید:

a) نقطه روی محور x از مبدأ به طرف راست 6 واحد فاصله داشته باشد.

b) نقطه روی محور y از مبدأ به طرف پایین 5 واحد فاصله داشته باشد.

مجهول و متحول



• بـا کدام وزن تعادل ترازو به وجود خواهد آمد؟
• آیا تنها یک وزن است که ترازو برای آن در حالت تعادل قرار می گیرد؟
• در یک شبانه روز درجهٔ حرارت، ثابت است یا متحول؟

فعالیت

مساوات زیر را که دارای دو خانه خالی می باشد در نظر بگیرید:
خانه خالی ها را یکی پی دیگر طوری پر نمایید که نخست خانهٔ اولی؛ سپس خانهٔ دومی مساوات پر گردد.

خانه خالی دومی   خانه خالی اولی

$$2 \times \square + \square = 9$$

• اگر به خانهٔ اول عدد، 1 را بگذاریم، عددخانهٔ دوم باید چند باشد؟
• اگر به خانهٔ اول عدد، 2 را بگذاریم، عدد خانهٔ دوم را پیدا کنید.
• آیا می‌توانیم به خانهٔ اولی هر عدد دیگر را بگذاریم.
• آیا در برابر قیمت‌های متغیری که به خانهٔ اول داده اید نظر به معلومات گذشته می توانید نامی برای عدد خانه دومی بگیرید؟

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را به دست می آوریم:

• برای انتخاب عدد خانهٔ اول ما امکان آن را داشتیم که عدد دلخواه را انتخاب کنیم، که در برابر آن باید از روی حل معادله، قیمت مجهول را برای خانهٔ دوم به دست آوریم.
• هرگاه در یک مساوات امکان دادن قیمت‌های مختلف به یک حرف افادهٔ الجبری وجود داشته باشد، حرف مذکور به نام متحول یاد می گردد.
• هرگاه به صورت کلی متحول قابل تغییر اختیاری نباشد، مجهول نامیده می‌شود.

مثال: در مساوات $2x - y = 1$ برای متحول x با در نظر داشت جدول زیر قیمت داده که بعد از قیمت گذاری در معادله، قیمت مجهول y به دست می آید:

مثلاً: برای $x = -3$ قیمت

$$2(-3) - y = 1$$

$$-6 - y = 1$$

$$y = -7$$

می‌باشد.

قیمت های متحول x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
قیمت های مجهول y	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	0	-2

تمرین

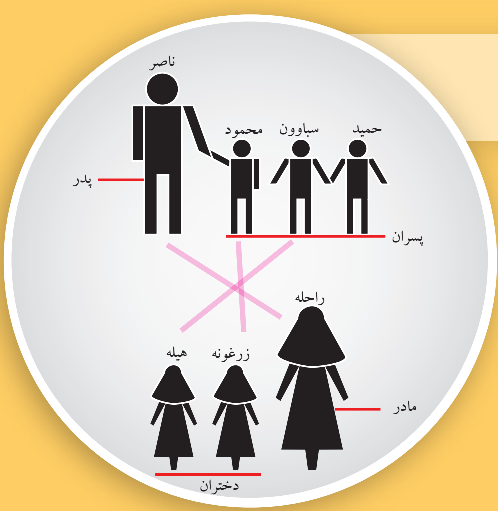
1- یک متحول و یک مجهول از هم چه فرق دارند؟ با مثال واضح سازید.

2- در سیستم مختصات جوره‌های مرتب را که در مثال فوق در جدول به دست آمده اند مشخص نموده، نقاط مذکور را با هم وصل کنید.

3- در معادلهٔ $2x - y = 7$ با در نظرداشت قیمت‌های متحول x که در زیر داده شده است قیمت مجهول y را دریافت کنید.

x	-3	-2	-1	1	2
y					

رابطــه



کی با کی چه رابطه دارد؟

فعالیت

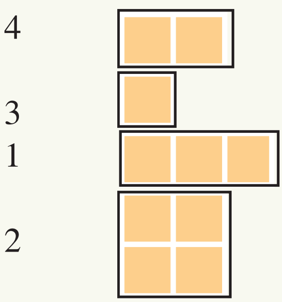
شکل بالا را در نظر گرفته، با ارتباطاتی که بین اعضای یک خانواده وجود دارد، به سؤال‌های زیر جواب دهید:

- راحله خانم ناصر است، حمید با ناصر چه رابطه دارد؟
- محمود پسر ناصر است، راحله و حمید چه رابطه دارند؟
- هیله خواهر سباوون است، آیا سباوون برادر هیله است؟
- هیله خواهر زرغونه و زرغونه خواهر محمود است، پس هیله با محمود چه ارتباط دارد؟
- از قرابت فامیلی برای روابط اعضای خانواده چند مثال دیگر بگویید.

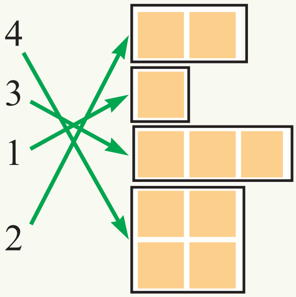
از فعالیت بالا می‌توانیم نتیجهٔ زیر را به دست آوریم:

هرگاه بین دو شی (دو جسم) و یا عناصر دو ست، توسط عملیه‌های ریاضی و یا کدام رشتهٔ اجتماعی، پیوندی وجود داشته باشد این پیوند به نام رابطه یاد می‌گردد.

مثال 1: بین اعداد 1، 2، 3 و 4 و تعداد مربع‌های مقابل یک رابطه برقرار می‌نماییم:



حل:



مثال 2: اگر نسرین 26 سال و انجیلا 16 سال عمر داشته باشند، بعد از 5 ، 10 و 15 سال سن نسرین و انجیلا چند سال خواهد بود؟

حل:

31	26	21	16	سن انجیلا
41	36	31	26	سن نسرین

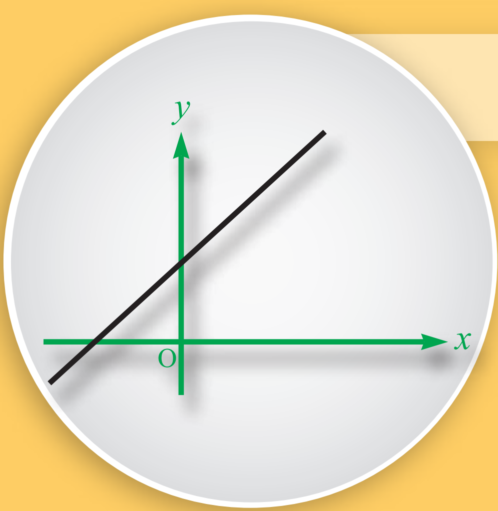
اگر در سیستم مختصات گراف سن انجیلا را نظر به سن نسرین رسم نماییم یک خط مستقیم است؛ بنابر این رابطه بین سن انجیلا و نسرین یک رابطهٔ خطی می‌باشد.

تمرین

1- یک ست 5 عنصره از نام‌های هم صنفان تان و یک ست 5 عنصره از میوه‌های مختلف تهیه نمایید، اسم هر هم‌صنفی تان را به میوهٔ مورد علاقهٔ او در یک قوس جوره بنویسید.

2- اعداد 1،2،3،4،5،6 و 8 را در نظر گرفته با رابطهٔ مساوی عددی را دریافت کنید که جذر المربع آن مساوی به یکی از اعداد فوق باشد؛ مثال: $\sqrt{25} = 5$ است.

رابطه خطی



اگر گراف یک رابطه خط مستقیم باشد، رابطه بین x و y را چه می‌نامند؟

فعالیت

محمود 20 ساله بود که دخترش نجلا تولد شد.

- زمانی که نجلا در 7 ساله گی شامل مکتب شد، می‌توانید بگویید که محمود چند ساله بود؟
- زمانی که نجلا 20 ساله شود پدرش چند سال خواهد داشت؟
- با در نظر داشت سن نجلا و پدرش جدول زیر را تکمیل کنید:

سن نجلا			7		15
سن رحمان	21	23		29	

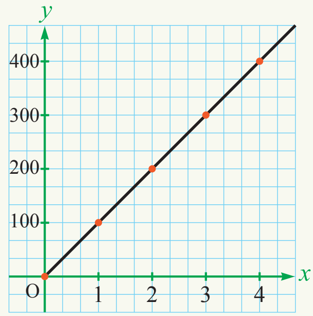
- گراف سن نجلا را نظر به محمود در سیستم مختصات قایم رسم کنید.
- اگر محمود 24 ساله باشد، از روی گراف پیدا کنید که نجلا چند ساله است؟
- چه رابطه بین سن محمود و نجلا وجود دارد؟
- اگر سن محمود را به y و سن نجلا را به x نشان دهیم، رابطه بین سن محمود و نجلا را با یک افادهٔ الجبری بنویسید.

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

هرگاه گراف یک رابطه خط مستقیم باشد، در این صورت رابطه بین متحولین را به نام رابطهٔ خطی یاد می‌نمایند.

مثال 1: هرگاه فاصلهٔ کابل – هرات را نظر به زمان با سرعت وسطی 100Km فی ساعت طی نماییم، چگونه رابطه بین فاصله و سرعت وسطی وجود دارد؟

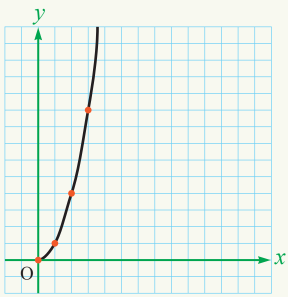
حل: ابتدا رابطه بین فواصل طی شده نظر به زمان را در جدول زیر درج می‌نماییم:



زمان به ساعت	0	1	2	3	4
فاصله به کیلومتر	0	100	200	300	400

هرگاه جورهٔ مرتب فوق را در سیستم کمیات وضعیه تثبیت و باهم وصل نماییم دیده می‌شود که یک خط مستقیم به وجود می آید. بنابر این رابطه بین سرعت وسطی و فاصلهٔ طی شده یک رابطهٔ خطی می‌باشد.

مثال 2: رابطه بین طول اضلاع مربع و مساحت آن را در نظر می گیریم. به این منظور هرگاه ضلع مربع را به a و مساحت آن را به a^2 نشان دهیم، در برابر قیمت‌های مختلف a قیمت‌های مختلف دیگری برای مساحت به دست می آوریم که در جدول زیر درج شده‌اند:



ضلع a	1	2	3	4	5
مساحت مربع a^2	1	4	9	16	25

نقاط را در سیستم کمیات وضعیه مشخص نموده گراف را ترسیم نمایید. آیا گراف یک خط مستقیم است؟ آیا رابطه خطی است؟

نخیر در این صورت رابطه بین طول ضلع a و مساحت مربع؛ یعنی a^2 خطی نبوده که این نوع رابطه را به نام رابطهٔ غیر خطی یاد می گردد.

تمرین

1- طول یک فنر در حالی که وزن به آن آویزان نشده است 10cm است، هرگاه وزن m کیلوگرام را به آن بیاویزیم طول فنر توسط رابطهٔ $L = 10 + 0.5 \times m$ افزایش می یابد.

a) برای وزن 4 کیلوگرام طول فنر چند است؟

b) چه مقدار وزن در فنر آویزان نماییم تا طول فنر به 15 سانتی متر برسد؟

2- طول یک سوسمار نوزاد 30 سانتی‌متر است. هرگاه سالانه به طور وسطی 22 سانتی‌متر به طول نوزاد اضافه شود، پس در چه زمانی سوسمار به 96 سانتی‌متر خواهد رسید؟

تشکیل رابطه‌های خطی



فروش 100 پوقانه چند مفاد خواهد داشت؟

فعالیت

احمد به خاطر این که پول قلم و کاغذ خود را پیدا نماید، به مشورهٔ مادرش تصمیم می گیرد تا بعد از ظهر در شهر پوقانهٔ هوایی بفروشد. هرگاه احمد برای خرید 100 عدد پوقانه 260 افغانی بپردازد و علاوه بر آن 20 افغانی برای خوردن غذا و 20 افغانی هم برای کرایهٔ ترانسپورت بپردازد. تصمیم می گیرد که هر پوقانه را 3 افغانی به فروش برساند.

به خاطر ارزیابی مسأله، موضوع را با معلم ریاضی خود مطرح می کند و معلم به او مشوره می‌دهد، تا معادلات تعداد پوقانه‌ها را نظر به مصرف کلی و مفاد از سبب فروش تشکیل نموده گراف‌های هردو حالت را با هم مقایسه کند.

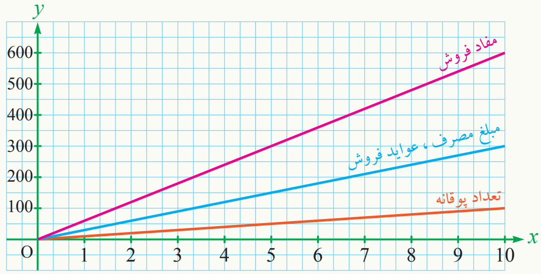
در تحلیل گراف و ارزیابی مسأله با احمد در تکمیل جوابات فعالیت کمک کنید.

- بعد از فروش چند عدد پوقانه، عواید فروش مساوی به مصرف کلی می‌شود؟
- جدول مصرف مجموعی را که برای 100 عدد پوقانه که جمله مبلغ 300 افغانی مصرف کرده است تکمیل کنید:

تعدادپوقانه	0	10		30	40		60	70			100
مبلغ مصرف	0	30	60			150			240	270	

- هرگاه x تعداد پوقانه‌ها و y مقدار مصرف باشد، رابطه الجبری مصارف پوقانه‌ها را به دست آورده گراف آن را در سیستم مختصات قایم ترسیم کنید.
- مانند جدول مصرف کلی، جدول فروشات زیر را بر حسب عواید فروش پوقانه‌ها تکمیل کنید.

تعدادپوقانه	0	10			40			70		90	100
مبلغ مصرف	0		60			150			240		
عواید فروش	0	60		180			360				
مفاد فروش	0		60								



- در نقطهٔ تقاطع گراف مفاد و مصرف با هم چه رابطه دارند؟
- چند پوقانه به فروش برسد تا مقدار فروش و مصرف با هم برابر گردد؟ این مسأله از نگاه گراف چه معنا می دهد؟

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

حل دو معادلهٔ خطی عبارت از نقطهٔ تقاطع گراف‌های آن‌ها می‌باشد؛ زیرا در آن نقطه x و y یعنی فاصله و ترتیب برای هر دو معادله یکسان می‌باشد.

تمرین

1– قرار شد که یک رستورانت برای یک شرکت غذا تهیه کند. این رستورانت 1000 افغانی پیش‌پرداخت سالانه و به علاوه 600 افغانی هر ماه مطالبه کرده است. رستورانت دیگر بدون پیش‌پرداخت و ماهانه 850 افغانی مطالبه نموده است. جدول زیر را کامل کنید.

ماه	حمل	ثور	جوزا	سرطان	اسد	سنبله	میزان	عقرب	قوس	جدی	دلو	حوت
رستوران اول												
رستوران دوم												

گراف پرداخت به این دو رستورانت را در یک سیستم مختصات رسم نمایید، اگر 6 ماه غذا بخواهیم قرارداد کدام رستورانت به نفع ما است؟



● اگر سرعت یک موتر $50\frac{Km}{h}$ باشد:

– در دو ساعت کدام فاصله را طی می کند؟

– در سه ساعت کدام فاصله را طی می کند؟

● آیـا گفته می‌توانید که هر زمان به یک فاصله جداگانه با یک سرعت معین ارتباط می گیرد؟

فعالیت

حال رابطه بین سرعت یک موتر و فاصله طی شده نظر به زمان را در نظر می گیریم:

● اگر یک موتر با سرعت ثابت $60\frac{Km}{h}$ حرکت نماید. جدول زیر را با در نظرداشت زمان داده شده برای فاصله طی شده تکمیل کنید:

t	1h	2h	3h	4h	5h	6h
x						

● برای جوره‌های مرتب به دست آمده هرگاه سیستم مختصات قایم را برای زمان t و فاصلهٔ x در نظر بگیریم گراف آن را رسم کنید.

● آیا گفته می‌توانید که به هر زمان داده شده یک فاصله جداگانه وجود دارد؟

●هرگاه t متحول مستقل رابطه فوق باشد در این صورت قیمت‌های کدام کمیت تابع آن است؟

از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

– یک رابطه بین عناصر دو ست طوری که برای هر قیمت ناحیه متحول تنها یک تصویر یا تنها یک عدد وجود داشته باشد به نام تابع یاد می گردد.

– ناحیهٔ قیمت‌هایی که متحول از آن قیمت می گیرد به نام ناحیه تعریف (Domain) یاد می گردد.

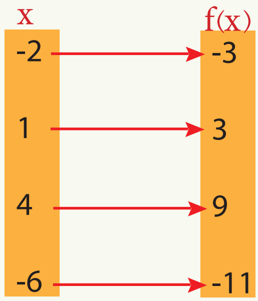
ناحیهٔ قیمت‌های که از ناحیهٔ تعریف برای مجهول به دست می‌آید به نام ناحیهٔ قیمت‌ها (Codomain) یاد می گردد.

هر گاه A ناحیهٔ تعریف، B ناحیهٔ قیمت ها و f یک تابع باشد، در این صورت y تابع x طور زیر نوشته می‌شود: $y=f(x)$

مثال1: نشان دهید که $f(x)=2x+1$ با قیمت‌های -2 ، 1 ، 4 و $x=-6$ یک تابع است.

حل: با وضع کردن قیمت‌های داده شده در تابع، قیمت‌های تابع طور زیر به دست می‌آید:

$$f(x)=2x+1$$
$$f(-2)=2(-2)+1=-3$$
$$f(1)=2(1)+1=3$$
$$f(4)=2(4)+1=9$$
$$f(-6)=2(-6)+1=-11$$



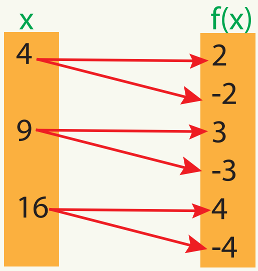
از شکل فوق معلوم می‌شود که برای هر قیمت از متحول در ناحیهٔ تعریف، یک قیمت یا عدد در ناحیهٔ قیمت ها وجود دارد؛ پس نظر به تعریف تابع، f یک تابع است.

هر افادهٔ الجبری که شکل $y=ax+b$ را داشته باشد به نام تابع یاد می‌شود یا به عباره دیگر هر رابطهٔ خطی را به نام تابع یاد می‌نمایند.

مثال2: هرگاه قیمت‌های 4، 9، 16 به تابع $f(x)=\sqrt{x}$ داده شده باشد آیا f یک تابع است یا خیر؟

حل: با قرار دادن قیمت‌های متحول در تابع f قیمت‌های تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{x}$$
$$f(4)=\sqrt{4}=\pm2$$
$$f(9)=\sqrt{9}=\pm3$$
$$f(16)=\sqrt{16}=\pm4$$



در شکل فوق می‌بینیم که برای هر عنصر از ست x دو قیمت در ست $f(x)$ وجود دارد، بنابراین نظر به تعریف تابع، f یک تابع نیست.

تمرین

آیا تابع $f(x)=\frac{4}{3}x$ برای قیمت‌های داده شدهٔ 0، 1، 2، 3 و -3 یک تابع است؟

نکات مهم فصل نهم

• **نقطه در مستوی:** یک نقطه را در مستوی می‌توانیم در یک سیستم کمیات وضعیه قایم تعریف نماییم که توسط دو مختصهٔ (x , y) که به نام فاصله و ترتیب یاد می‌شوند مشخص می گردد.

• **سیستم مختصات قایم:** دو محور عمود با هم y و x که یکدیگر خود را در نقطه o قطع می کنند به نام سیستم مختصات قایم یاد می گردد که به هر جوره مرتب (x , y) آن یک نقطه مستوی ارتباط دارد.

x را به نام فاصله و y را به نام ترتیب نقطه یاد می کنند. از روی محورهای قیمت‌های آن‌ها که به واحدهای مساوی تقسیم شده اند تعیین می گردد.

• **مختصات یک نقطه در مستوی:** به هرنقطهٔ P یک مستوی مختصات قایم تنها یک جوره مرتب اعداد (x , y) و برعکس به هر جورهٔ مرتب اعداد (x , y) تنها و تنها می‌توان یک نقطهٔ P مستوی مختصات قایم را ارتباط داد.

• **مجهول و متحول:** هرگاه در یک معادله امکان دادن قیمت‌های مختلف به یک حرف وجود داشته باشد حرف مذکور به نام متحول یاد می گردد.

و هرگاه به صورت کلی متحول قابل تغییر اختیاری و دلخواه نباشد، مجهول نامیده می‌شود.

• **رابطـــه:** هرگاه بین دو شی، جسم و یا عناصر دو ست توسط عملیه‌های ریاضی و یا هم کدام رشتهٔ اجتماعی پیوندی وجود داشته باشد به نام رابطه یاد می گردد.

• **روابط خطی:** هرگاه گراف، یک رابطه یک خط مستقیم باشد، در این صورت رابطه بین متحولین آن‌ها به نام رابطهٔ خطی یاد می گردد.

• **تشکیل رابطه‌های خطی:** آن عده روابط خطی که گراف‌های آن‌ها یک خط مستقیم را تشکیل وتوسط روابط الجبری افاده گردیده و حل آن‌ها دریافت می گردد.

به طور جمعی این پروسه به نام تشکیل رابطه‌های خطی یاد می گردد، که در حقیقت تطبیق معادلات خطی در زنده‌گی روزمره می‌باشد.

• **تابع**

یک رابطه بین عناصر دو ست طوری که برای هر قیمت ناحیهٔ متحول یگانه تصویر یا عدد وجود داشته باشد به نام تابع یاد می گردد.

تمرین عمومی

1- نقاط داده شدهٔ زیر را در سیستم مختصات قایم مشخص نمایید:

$D(-1,4)$, $C(4,-1)$, $B(3,-5)$, $A(1,5)$

2- مختصات 3 نقطه را بدهید که دارای ترتیب‌های مساوی بوده؛ ولی نقاط روی هم قرار نداشته باشند.

3- مطلوب است مختصات رأس‌های مثلث متساوی الساقین که، یک رأس آن بالای محور y در $y = 5$ و دو رأس دیگر آن بالای محور x قرار داشته طول قاعدهٔ آن 9 واحد است.

4- یک رابطه بین عناصر ست $A = \{1,2,3,4\}$ و $B = \{5,6,7,8\}$ را توسط گراف ترسیم کنید.

5- توسط علامهٔ "<"یک رابطه برای هر عنصر ست A به B تعریف نموده، با درنظر داشت ست‌های داده شده در مثال 4 برای عناصر ست‌های A و B توسط رابطهٔ "<" مثال بنویسید. (به طور مثال $1<5$ است) آیا رابطهٔ برعکس وجود دارد؟

6- معادله‌های زیر را حل کنید:

a) $5x - 5 = 5$ b) $3x + 8 = 23$

c) $7x - 2 = 19$ d) $x + \frac{1}{2} = 4$

7- سن نرگس 25 سال کمتر از سن مادرش است، اگر مجموع سن نرگس ومادرش 41 سال باشد عمر نرگس چند است؟

8- زلمی و نصیر 36 جلد کتاب مطالعه نمودند، اگر زلمی 6 جلد بیشتر از نصیر مطالعه نموده باشد هرکدام شان چند جلد کتاب مطالعه کرده اند؟

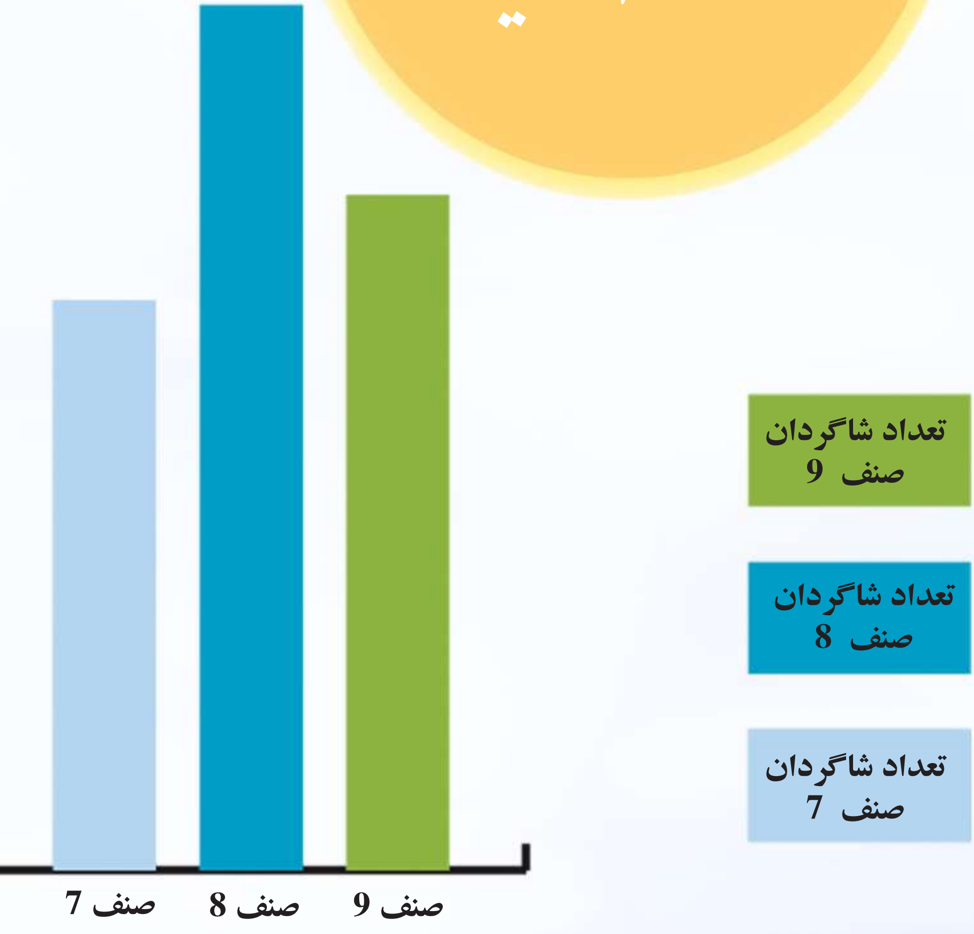
9- از یک توپ تکهٔ 30 متره، 7 جوره پیراهن و تنبان دوخته شده است. هرگاه 2 متر تکه باقی مانده باشد. برای هر جوره لباس چند متر تکه مصرف گردیده است؟

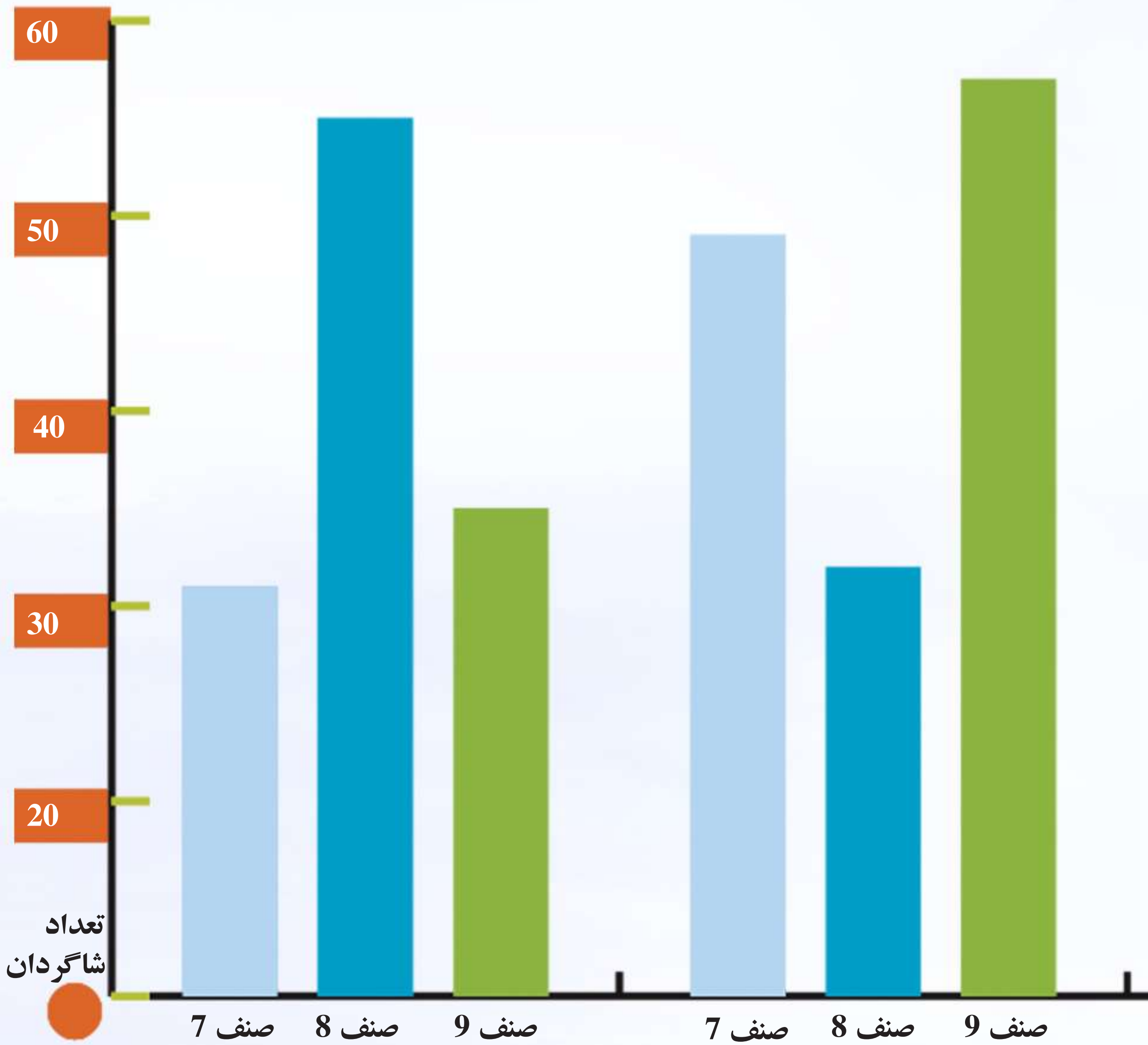
10- اگر با 3 چند یک عدد 4 علاوه گردد مساوی به 10 می‌شود، عدد چند است؟

11- اگر از دو چند یک عدد 5 منفی گردد مساوی به خود عدد می‌شود، عدد کدام است؟

فصل دهم

احصائیه





60
50
40
30
20
تعداد
شاگردان
صنف 7
صنف 8
صنف 9
صنف 7
صنف 8
صنف 9

جدول کثرت دیتای غیر متمادی



شخصی می‌خواهد به خاطر اشتراک در میله نوروز از کابل به مزار برود.
از عابر راه می‌پرسد.
عابر می‌گوید: از کابل به چاریکار، از چاریکار به سالنگ، از سالنگ به دوشی و از دوشی ...
شخص اشتراک کنندۀ میله نوروز از شنیدن این جواب گیچ می‌گردد.
آیا عابر می‌توانست با جزئیات کمتر به طور مختصر جواب بدهد؟

فعالیت

نمرات شاگردان یک صنف در مضمون ریاضی قرار زیر است:

88	58	51	59	67	48	35	30	25	42
43	56	91	72	78	75	56	48	77	82
20	47	95	42	100	82	63	57	53	94
96	83	92	76	26	75	12	62	40	59

- اگر بخواهیم جدول کثرت را تشکیل دهیم، آیا نوشتن نمرات از 1 تا 100 فکر خوبی است؟ چه مشکلاتی دارد؟
- جدول زیر را تکمیل کنید:

نمره	تعداد f
0 تا 9	
10 تا 19	
20 تا 29	2
30 تا 39	
40 تا 49	
50 تا 59	
60 تا 69	
70 تا 79	
80 تا 89	
90 تا 100	

• دیتای را که می‌توانند در دستهٔ پنجم جدول قرار گیرند نام ببرید.
• سطر دوم، یعنی چه؟
• اگر دیتای بالا را نمی‌داشتیم، آیا می‌توانستیم بگوییم نمرهٔ دو نفری که بین 11 تا 20 است، چند است؟
• چند دیتا مختلف می‌تواند در هر دسته قرار گیرد؟

بعضی اوقات وقتی تعداد دیتا زیاد یا کثرت بسیاری از دیتا صفر یا عدد کم باشد جدول کثرت مجزا کمک زیادی ننموده، یا تشکیل آن خیلی مشکل است؛ بنابراین در این حالت از جدول کثرت به شکل دسته بندی استفاده می کنیم، کثرت هر دسته نشان می‌دهند که در دسته چند دیتا وجود دارد؛ ولی ما نمی‌توانیم بگوییم آن دیتا کدام اند.

مثال: با استفاده از دیتای فعالیت فوق، جدول زیر را تکمیل کنید.

نمره	تعداد f
0 – 49	13
50 – 59	8
60 – 69	3
70 – 79	6
80 – 89	4
90 – 100	6

دستهٔ اول چه چیزی را به شما نشان می دهد؟
استفاده از کدام جدول ساده تراست؟
اگر نمره یک شاگرد 62 باشد در کدام دسته قرار دارد؟
عدد 50 و 59 در دستهٔ دوم چه چیزی را نشان می‌دهد؟

حل: دستهٔ اول نشان دهندهٔ تعداد شاگردانی که نمرهٔ آن‌ها از 50 کم تراست و یا هم ناکام شده اند.
اگر بخواهیم بدانیم که چند شاگرد ناکام شده‌اند جدول دوم کار ما را ساده تر می کند، زیرا اطلاعات 5 سطر اول جدول را، در یک سطر خلاصه کرده ایم.
عدد 62 در دستهٔ سوم قرار دارد.
عدد 50 نشان دهندهٔ کم ترین عددی است که می‌تواند در این دسته قرار گیرد و 59 نشان دهندهٔ بیشترین عددی است که می‌تواند در این دسته قرار گیرد.

تمرین

جدول کثرت دیتای زیر را تکمیل کنید:

10	40	30	20	8	10
18	30	35	25	14	12
37	29	28	17	15	14

نمره	1 – 9	10 – 19	20 – 29	30 – 39
تعداد				

خواص اجزای جدول کثرت



پس از آن که معلم در صنف شاگردان خود را به سه دستهٔ خوب، متوسط و ضعیف تقسیم کرد، یک شاگرد از دستهٔ خوب که نمره 98 داشت پرسید: آیا من با کسی که نمره اش 82 است در کورس یکجا هستم؟

فعالیت

نمرات شاگردان در مضمون ریاضی و جدول کثرت در درس قبل را در نظر بگیرید. معلم این صنف می‌خواهد به شاگردان توصیه کند تا برای بهترشدن نتایج مضمون شان کورس شخصی بگیرند.

برای این کار صنف را به سه دسته ضعیف، متوسط وخوب تقسیم نموده جدول زیر را پر کنید:

وضعیت شاگردان	تعداد
ضعیف : 0 – 59	
متوسط : 60 – 79	
خوب : 80 – 100	

- عدد 60 و عدد 80 چه چیزی را نشان می‌دهند؟
- چند نمرهٔ مختلف می‌تواند در دسته دوم قرار گیرد؟
- این اعداد را با اختلاف 80 و 60 مقایسه کنید.
- شاگردانی که نمرهٔ آن‌ها بین 80 تا 100 است، در کدام دسته قرار دارند؟
- آیا کورسی که شاگردان دستهٔ سوم در آن شرکت می‌کنند با کورسی که شاگردان دسته دوم شرکت می‌کنند یکسان است؟
- آیا کورسی که یک شاگرد با نمره 83 در آن شرکت می‌کند، با کورسی که یک شاگرد با نمرهٔ 90 در آن شرکت می‌کند و شاگردی که نمره 93 گرفته است یکسان هستند؟

کم‌ترین مقداری که می‌تواند در یک دسته قرار گیرد، سرحد پایینی و بیشترین مقداری را که می‌تواند در یک دسته قرار گیرد، سرحد بالایی می‌نامیم. سرحد بالایی و پایینی صنف، موقعیت دیتا را در یک صنف مشخص می‌کند؛ یعنی تعین می‌کند که یک دیتا در کدام صنف باشد. هم چنان سرحدهای بالایی و پایینی یک دسته یا صنف طول صنف که عبارت از تفاوت این دو سرحد است، را تعیین می‌کند.

فعالیت بالا نشان می‌دهد که data های که در یک دسته قرار می گیرند از نظر احصاییوی تفاوت خاصی برای ما ندارند و می‌توان همه را یکسان در نظر گرفت برای نمایش یکسان هر دسته از عددی که اوسط دسته است استفاده می کنیم.

مثال: نمره‌های مضمون ریاضی یک صنف در زیر خلاصه شده است:

آیا از نظر کامیابی یا ناکامی شاگردی که 12 نمره گرفته است با شاگردی که 25 یا 48 نمره گرفته است در یک دسته فرق می کند؟
طول‌های اول، دوم و سوم را پیدا کنید. آیا در دسته‌بندی باید طول دسته‌ها برابر باشند.
اوسط هر دسته را دریافت نموده این عدد چه چیزی را نشان می‌دهد؟

نمره ریاضی	تعداد	وسط دسته
$0-49$	4	$\frac{0+49}{2}=24.5$
$50-59$	2	$\frac{50+59}{2}=54.5$
$60-69$	7	$\frac{60+69}{2}=64.5$
$70-79$	10	$\frac{70+79}{2}=74.5$
$80-89$	9	$\frac{80+89}{2}=84.5$
$90-100$	8	$\frac{90+100}{2}=95$

حل: از نظر کامیابی و ناکامی در یک دسته شاگردان که نمره 12، 25 و 48 گرفته اند با هم فرقی ندارند؛ زیرا همهٔ آن‌ها ناکام شده‌اند.

طول دسته اول $=50-0=50$
طول دسته دوم $=60-50=10$
طول دسته سوم $=70-60=10$

می‌توان برای هر دسته چنین گفت :
ضرور نیست طول دسته ها با هم برابر باشند. طول دسته، بسته‌گی به این دارد که به خاطر کدام مطلب دسته بندی می‌شود وچه اطلاعاتی می‌توانیم از آن به دست آوریم. در مثال قبلی کورس شخصی که می‌خواستیم صنف را به سه دسته تقسیم کردیم.
4 نفر از شاگردان 24.5 و 2 نفر 54.5 ، 7 نفر 64.5 و 10 نفر 74.5 و 9 نفر 84.5 و 8 نفر 95 نمره کسب کرده اند.

تمرین

جدول زیر را تکمیل کنید.

داده‌های هر دسته	دسته	طول دسته	وسط دسته
16 , 16.5 , 17 , 17.5	$16-18$		
18 , 18.5 , 19.5 , 20	$18-20$		



کثرت تجمعی

چطور فهمیده می‌توانیم که تا اخیر ماه اسد چند روز رخصتی داریم؟

فعالیت

توسط یک جنتری، جدول زیر را پر کنید:

ماه های سال	به شمول روزهای جمعه روزهای رخصتی	ستون سوم
حمل		
ثور		
جوزا		
سرطان		
اسد		
سنبله		
میزان		
عقرب		
قوس		
جدی		
دلو		
حوت		

- در حمل چند روز رخصتی داریم؟
- در ثور چند روز رخصتی داریم؟
- در جوزا چند روز رخصتی داریم؟
- از اول سال تا پایان جوزا چند روز رخصتی داریم؟
- در جدول کثرت بالا ستون سوم را طوری پرکنید که در هر ردیف کثرت همان دسته و دسته‌های قبل از آن باهم جمع شده باشند.

- آیا با استفاده از این ستون می‌توانید آسان‌تر بگویید، تا پایان جوزا چند روز رخصتی دارید؟
- آخرین عدد سطر در ستون سوم چند است؟ این عدد چه چیزی را نشان می‌دهد؟

در فعالیت بالا تعداد روزهای رخصتی را در هر ماه کثرت مطلق نامیده و تعداد روزهای رخصتی تا پایان سال را کثرت تجمعی می‌نامیم. کثرت تجمعی هر دسته برابر کثرت مطلق آن دسته و دسته‌های قبل از آن است.

مثال: یک کارخانه اعلان کرد که اگر تولیدات آن دچار مشکلات باشد خریداران می‌توانند اشیاء را بغرض ترمیم به کارخانه مسترد کنند. جدول مقابل نشان دهندهٔ تعداد کالاهای پس از فروش که برای ترمیم مسترد شده اند می‌باشد.

ماه پس از خرید	کثرت مطلق (تعداد کالاهای مسترد شده)
10 – 13	3
13 – 16	6
16 – 19	7
19 – 22	4

چند کالا برای ترمیم پس از 16 ماه به کار خانه مسترد شده اند؟

بین 16 تا 19 ماه چند کالا برای ترمیم مسترد شده است؟

حل: کثرت تجمعی را پیدا می کنیم.

دسته ها	کثرت مطلق	کثرت تجمعی
10 – 13	3	3
13 – 16	6	$6 + 3 = 9$
16 – 19	7	$9 + 7 = 16$
19 – 22	4	$16 + 4 = 20$

باتوجه به سطر دوم جدول می‌بینیم که 16 ماه اول 9کالا برای ترمیم؛ 7 کالا بین ماه‌های 16 تا 19 مسترد گردیده است. اگر این اعداد را نمی‌دانستیم با استفاده از کثرت تجمعی می‌توانیم چنین پیدا کنیم.

$$16 - 9 = 7$$

تمرین

جدول زیر را تکمیل کنید.

دسته ها	کثرت مطلق	کثرت تجمعی
10 – 15	3	
15 – 20	2	
20 – 25	4	
25 – 30	7	
30 – 35	6	
35 – 40	5	

کثرت نسبی



نرگس و مرسل که در دو مکتب مختلف درس می‌خوانند با هم صحبت می‌کردند.

نرگس گفت: صنف ما 37 نفر کامیاب دارد. مرسل گفت: صنف ما 30 نفر کامیاب دارد. شاگردان کدام صنف بهتر درس خوانده اند؟

فعالیت

صنف الف 40 شاگرد و صنف ب 35 شاگرد دارد. در مضمون ریاضی 32 شاگرد از صنف (الف) و 30 شاگرد از صنف (ب) کامیاب شده‌اند.

- نسبت شاگردان کامیاب به کل شاگردان صنف (الف) چند است؟
- نسبت شاگردان کامیاب به کل شاگردان صنف (ب) چند است؟
- با مقایسۀ این دو نسبت بگویید که شاگردان کدام صنف بهتر درس خوانده‌اند؟
- آیا می‌توانید با مقایسۀ تعداد شاگردان کامیاب در دوصنف این جواب را بدهید.

فعالیت فوق نشان می‌دهد که در بعضی حالات برای مقایسه دو وضعیت نمی‌توان کثرت‌های مطلق را به هم مقایسه کرد در چنین حالت از $\frac{\text{کثرت مطلق}}{\text{کثرت کل داتا}}$ استفاده می کنیم.

مقدار این نسبت را کثرت نسبی می‌گوییم برای مقایسۀ بهتر، این عدد را با فیصدی نشان می‌دهیم و فیصدی کثرت نسبی می‌نامیم.

مثال: در یک امتحان نمرات دوصنف در جدول زیر آورده شده است:
این دوصنف را باهم مقایسه کنید:

صنف ب		کثرت مطلق
ضعیف	10 – 30	19
متوسط	30 – 50	25
خوب	50 – 70	16

صنف الف		کثرت مطلق
ضعیف	10 – 30	6
متوسط	30 – 50	10
خوب	50 – 70	4

حل: جدول تعداد کل شاگردان این دوصنف باهم برابر نیستند، پس نمی‌توانیم کثرت مطلق هر دو دسته را باهم مقایسه کنیم کثرت نسبی هر دو دسته را ابتدا پیدا می کنیم و می‌بینیم که شاگردان ضعیف در دوصنف به گونهٔ تقریبی نزدیک‌تر اند؛ ولی شاگردان متوسط صنف (الف) نظر به صنف (ب) موفق‌تر بوده‌اند.

صنف ب	کثرت مطلق	کثرت نسبی	فیصد کثرت نسبی
10 – 30	19	$\frac{19}{60}$	31.6%
30 – 50	25	$\frac{25}{60}$	41.6%
50 – 70	16	$\frac{16}{60}$	26.6%

صنف الف	کثرت مطلق	کثرت نسبی	فیصد کثرت نسبی
10 – 30	6	$\frac{6}{20}$	30%
30 – 50	10	$\frac{10}{20}$	50%
50 – 70	4	$\frac{4}{20}$	20%

تمرین

جدول زیر را تکمیل کنید.

صنف الف	کثرت مطلق	کثرت نسبی	فیصد کثرت نسبی
5 – 10	2		
10 – 15	3		
15 – 20	1		
20 – 25	4		
25 – 30	6		

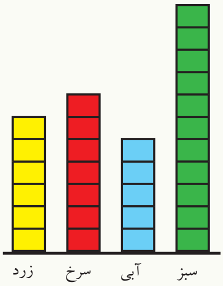
گراف میله‌ای (گراف نواری)



در تصویـــر درخت‌هایی را می‌بینید که همـــهٔ آن‌ها از یک جنس انـــد. آیا گفته می‌توانید که از روی ارتفاع، عمر کدام یک از آن‌ها زیادتر است؟

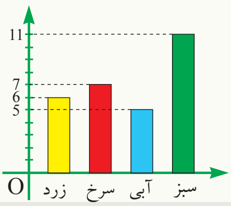
فعالیت

از شاگردان یک مکتب پرسیدیم رنگ موتر مورد علاقهٔ خود را بگویید. اطلاعات به دست آمده را در شکل مقابل به صورت گراف خلاصه نمودیم.



- تعداد مربع ها در هر میله چه چیزی را نشان می‌دهند؟
- از روی شکل، بگویید که رنگ مورد علاقهٔ چند نفر زرد بوده است؟
- کدام رنگ از همه کمتر انتخاب شده است؟
- اگر رنگ ها در زیر هر ستون نوشته نمی‌شدند، آیا می‌توانستید اطلاعات لازم را پیدا کنید؟
- اگر عبارت تحت گراف نمی‌بود، آیا با دیدن گراف می‌توانستید بگویید که گراف در مورد چیست؟
- اگر جدول مقابل داده شده است سعی کنید گراف آن را رسم کنید آیا این کار ساده است؟
- به این گراف نگاه کنید.

سبز	آبی	سرخ	زرد
11	5	7	6



• آیا می‌توانید اطلاعات جدول فوق را در این گراف آسانتر مشاهده کنید؟
• طول هر یک از میله‌ها چه چیزی را نشان می‌دهد؟
• چرا در گراف شماره 1 از مربع ها استفاده نمودیم؛ ولی در گراف شماره 2 این کار را نکردیم؟
• با نگاه کردن به گراف و مقایسهٔ طول میله ها بگویید: کدام رنگ ها به ترتیب بیشتر از همه، مورد علاقهٔ شاگردان بوده است؟
• آیا تغییر مکان دیتاها در رسم گراف در تفسیر اطلاعات تغییری ایجاد می کند؟
• اگر سوال را در شروع فعالیت نمی خواندید، آیا می‌توانستید، بگویید این رنگ چه چیزی را نشان می‌دهد و چه پیشنهادی می کنید؟

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

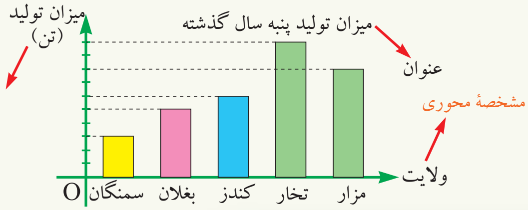
گراف بالا را گراف میله یی می‌نامیم و یک گراف میله یی باید دارای عنوان، مقیاس و مشخصهٔ محور باشد. در گراف میله یی محل قرار گرفتن دیتا مهم نیست. طول میله ها نشان دهندهٔ کثرت دیتا می‌باشد.

مثال: میزان تولید پنبهٔ پنج ولایت کشور سال گذشته، بر حسب تن در جدول زیر داده شده است:

سمنگان	بغلان	کندز	تخار	مزار	ولایت ها
3	5	6	10	8	میزان تولید

تولید هر ولایت را به صورت گراف میله یی نشان دهید. کدام ولایت تولید بیشتری داشته است؟

حل:



تمرین

1- برای ترسیم گراف میله یی به چه اطلاعاتی نیاز دارید؟
2- تیم‌های ورزشی یک مکتب در جدول زیرداده شده است:

دوش	فوتبال	والیبال	بسکتبال
6	11	12	8

گراف آن را ترسیم کنید.

گراف خط منکسر

دوکتوران چگونه این گراف‌ها را تفسیر می کنند؟



فعالیت

اداره هواشناسی درجهٔ حرارت شهر مزار را در ماه حمل در یک شبانه روز بر حسب درجهٔ سانتی گرید قرار جدول زیر اعلان کرده است:

بعد از 12 شب	8 شب	6 بعد از ظهر	11 ظهر	8 صبح	5 صبح	12 شب
18	23	21	28	25	20	15

اطلاعات بالا را با پیدا کردن نقاط روی مستوی مختصات زیر نمایش و نقاط را توسط خط مستقیم باهم وصل کنید.

با توجه به گراف بالا جواب سؤال‌های زیر را بنویسید.

- حداکثر و حداقل درجهٔ حرارت در کدام ساعت بوده است؟
- در کدام ساعت درجهٔ حرارت از 25 درجه بیشتر بوده است؟
- بیش ترین تغییرات درجهٔ حرارت بین کدام ساعت ها بوده است؟
- کدام ساعت بیشترین درجهٔ حرارت بوده است؟

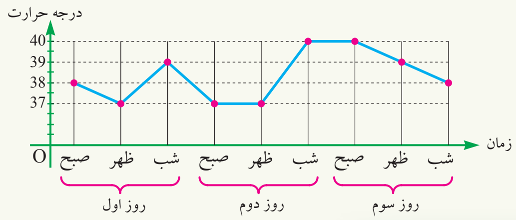
از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

اگر اطلاعات جمع آوری شده را توسط نقاط در مستوی مختصات ترسیم نموده و این نقاط را به کمک خطوط مستقیم با هم وصل نماییم، گرافی که توسط نقاط وصل شده به دست می آید به نام گراف خط منکسر یاد می‌شود.

مثال: داکتر طب یک مریض را در سه روز متواتر تحت مطالعه قرار می‌دهد.
گراف تغییر درجهٔ حرارت را رسم کنید.

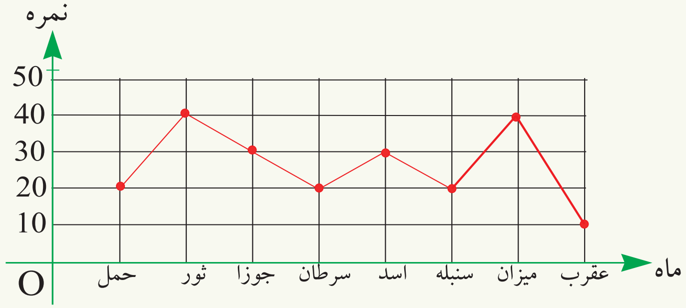
حل: data درجدول زیر آورده شده است.

روز اول			روز دوم			روز سوم		
صبح	ظهر	شب	صبح	ظهر	شب	صبح	ظهر	شب
38	37	39	37	37	40	40	39	38



تمرین

1- منیژه، گراف خط منکسر نمره‌های ریاضی ماهانهٔ خود را به صورت شکل زیر رسم کرده است.



- او در کدام ماه بیشترین نمره را گرفته است؟
- نمرهٔ منیژه در کدام ماه از سایر ماه‌ها کمتر است؟
- در کدام ماه نمرهٔ منیژه از 35 بیشتر است؟

اوسط دیتای منفصل یا غیر متمادی



فردی یکی از دست‌های خود را در کوره‌یی با حرارت 10 درجه سانتی گرید بالای صفر قرار داده و دست دیگر خود را در داخل یخچال با سردی 10- درجه سانتی گرید قرار داده است از او پرسیدند که در چه حال هستی؟ او گفت: به طور اوسط خوب هستم! آیا پیدا کردن اوسط در این وضعیت درست است؟!

فعالیت

نمرات آخر سال سلیمان به قرار زیر است:

84	92	92	82	97	82	75	82	75	75

- اوسط نمرات سلیمان را پیدا کنید.
- به جای آن که 75 را سه بار با هم جمع کنید چه عمل دیگری می‌توانستید انجام دهید.
- جدول کثرت نمرات سلیمان را تشکیل دهید.
- روشی برای پیدا کردن اوسط نمرات سلیمان، با توجه به جدول کثرت به دست آورید.

فعالیت بالا به ما نشان می‌دهد که برای پیدا کردن اوسط دیتا در صورت تکرار دیتا می‌توان به جای جمع دیتا از ضرب کثرت در دیتا استفاده نمود؛ اگر در حالت کلی یک دیتا را با x و کثرت آن را با f نشان دهیم. این حاصل ضرب برابر $f \cdot x$ خواهد بود.

اگر دیتای اول و کثرت آن را به ترتیب با x_1 و f_1، دیتای دوم و کثرت آن را به ترتیب با x_2 و f_2 و ... دیتای آخر را با x_n و کثرت آن را با f_n نشان دهیم، اوسط تمام دیتا برابر خواهد بود با:

$$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{n}$$

مثال: میزان درآمد کارکنان در یک شرکت در جدول زیر آورده شده است:

درآمد بر حسب افغانی در ماه	شغل
50000	رئیس
40000	دو معاون
20000	منشی
30000	سه نفر متخصص
25000	پنج نفر مأمور
10000	دو نفر خانه سامان

مدیر این شرکت ادعا می کند که اوسط درآمد کارکنان این شرکت بیشتر از 30000 افغانی در ماه است. آیا این رقم نشان دهندۀ درآمد خوبی برای همه کارکنان شرکت است؟
آیا ادعای مدیر شرکت درست است؟ با استفاده از جدول کثرت اوسط درآمد کارکنان را پیدا کنید.

تعداد کارمندان f		درآمد هر کدام x	
رئیس	1	50000	$1 \times 50000 = 50000$
معاون	2	40000	$2 \times 40000 = 80000$
منشی	1	20000	$1 \times 20000 = 20000$
متخصص	3	30000	$3 \times 30000 = 90000$
مأمور	5	25000	$5 \times 25000 = 1250000$
خانه سامان	2	10000	$2 \times 10000 = 20000$

تعداد $14 = 1+2+1+3+5+2 = n$

$$\bar{x} = \frac{50000+80000+20000+90000+125000+20000}{14} = \frac{385000}{14} = 27500$$

چون اوسط درآمد کم تر از 30000 افغانی است، پس ادعای او درست نیست.

تمرین

سهیل شنبه و یکشنبه هر روز، 12 صفحه کتاب و سه‌شنبه و چهارشنبه و پنجشنبه هر روز 10صفحه و جمعه 16 صفحه کتاب خواند. با تشکیل جدول کثرت،اوسط صفحات خوانده شدۀ کتاب را در هر روز را پیدا کنید.

اوسط دیتای متصل یا متمادی با استفاده از جدول



وزارت تجارت اعلان کرد که اوسط صدور مقدار کشمش در سال گذشته ده هزار تن بود، یعنی چه؟

فعالیت

یک دهقان محصول کچالوی خود را در بوری‌ها، با اوزان مختلف بسته بندی کرد. این دهقان ادعا کرد که اوسط وزن بوری‌ها هفت سیر است.
از طرف شاروالی این بوری‌ها اندازه‌گیری شد؛ نتیجه در جدول زیر آورده شده است، آیا ادعای دهقان درست است؟

تعداد بوری‌ها	وزن هر بسته
11	6 – 6.5
14	6.5 – 7
12	7 – 7.5
8	7.5 – 8

- اوسط وزن بوری‌های دسته 7– 6.5 چه عدد می‌تواند باشد؟
- یک بوری با وزن 7 سیر در کدام دسته قرار می‌گیرد؟

اوسط هر دسته را در جدول مقابل پیدا کردیم.
با توجه به جدول مقابل می‌توان گفت که:

تعداد بوری‌ها	وزن بوجی ها
11	6.25
14	6.75
12	7.25
8	7.75

- اوسط این دیتا چند است؟
- آیا ادعای دهقان درست است؟

مثال: یک متخصص زراعت ارتفاع 35 درخت چنار را اندازه گرفت او می‌خواهد اوسط ارتفاع این نوع درخت‌ها را پیدا کنید.

ارتفاع	تعداد درخت ها(f)	اوسط(x)	$f \cdot x$
8 – 8.5	4	8.25	$4 \times 8.25 = 33$
8.5 – 9	5	8.75	$5 \times 8.75 = 43.75$
9 – 9.5	8	9.25	$8 \times 9.25 = 74$
9.5 – 10	7	9.75	$7 \times 9.75 = 68.25$
10 – 10.5	6	10.25	$6 \times 10.25 = 61.5$
10.5 – 11	5	10.75	$5 \times 10.75 = 53.75$

$$\overline{x} = \frac{33+43.75+74+68.25+61.5+53.75}{35} = \frac{334.25}{35} = 9.55$$

تمرین

اطلاعات راجع به اندازهٔ قد 20 شاگرد یک مکتب به صورت زیر داده شده است:

قد	158 – 162	162 – 166	166 – 170	170 – 174	174 – 178
کثرت	2	6	4	5	3

اوسط دیتای بالارا در یافت کنید.

نکات مهم فصل دهم

• وقتی که تعداد دیتا زیاد باشد از جدول کثرت به صورت دسته بندی استفاده می کنیم. در این حالت کثرت هر دسته نشان می‌دهد که در هر دسته چند دیتا قرار دارد.
• کم‌ترین مقدار یک دسته را سرحد پایینی و بیشترین مقدار آن را سرحد بالایی دسته می گویند.
• برای یکسان نشان دادن هر دسته از عددی که اوسط هر دسته است استفاده می‌نماییم.
• تکرار هر دیتا را کثرت مطلق آن دیتا در جدول کثرت می گوییم.
• در دسته بندی دیتا تمام دیتای واقع در یک دسته را برابر مرکز آن دسته در نظر می گیریم.
• مرکز دسته‌ها به تعداد اعضایی که در آن دسته قرار دارند تکرار می‌شود؛ یعنی کثرت مرکز دسته‌ها برابر تعداد اعضای است که در آن دسته قرار گرفته و این کثرت را کثرت مطلق آن دسته می گوییم.
• مجموع کثرت مطلق هر دسته و کثرت دسته‌های قبل از آن را کثرت تجمعی آن دسته می‌نامند و کثرت تجمعی آخرین دسته برابر است با تعداد کل دیتا.
• نسبت کثرت مطلق هر دسته بر تعداد کل دیتارا به نام کثرت نسبی می گویند. اگر f کثرت یک دسته و n تعداد دیتای آن دسته باشد کسر $\frac{f}{n}$ را کثرت نسبی آن دسته می گویند.
• اگر کثرت نسبی را ضرب 100 نماییم فیصدی کثرت نسبی به دست می آید.
• از گراف میله یی بیشتر برای ترسیم متحول مجزا و کیفی استفاده می کنند، در ترسیم گراف میله یی ترتیب قرار گرفتن میله‌ها اهمیت ندارد آن چه که در این گراف مهم است کثرت دیتا است.

در وقت ترسیم گراف میله یی سه موضوع زیر را در نظر بگیرید:
عنوان: بالا یا زیر هر گراف موضوع به طور خلاصه نوشته شود.
برحسب محورها: هر یک از محورها مشخصه دارند که مشخص کننده متحولی است که آن محور نشان می‌دهد.
مقیاس: مقیاس هر محور باید مشخص باشد؛ یعنی برای دیتا واحد انتخاب شود و آن واحد در حاشیهٔ گراف تذکر داده شود.
اگر دیتا را توسط نقاط دریک مستوی مختصات مشخص و این نقاط را به کمک خطوط با هم وصل نماییم گرافی که به دست می آید به نام گراف خط منکسر یاد می‌شود.
• برای پیدا کردن اوسط دیتا در صورت تکرار دیتا می توان به جای جمع دیتا از

ضرب کثرت در دیتا استفاده نمود. در دیتا متصل یا متمادی، مرکز دسته‌ها را درکثرت‌های

آن ضرب و با هم جمع کرده و پس از آن بر مجموع کثرت‌ها (که همان تعداد کل دیتا است) تقسیم کرد.

$$\frac{f_1x_1+f_2x_2+...+f_nx_n}{f_1+f_2+...+f_n} = \text{اوسط در جدول کثرت}$$

تمرین عمومی

1- تعداد شاگردان یک مکتب دوازده صنفی که هر صنف آن به دو صنف (الف) و (ب) تقسیم شده اند قرار زیر است:

جدول (ب)

40	45	42	37
48	49	32	35
46	35	46	32

جدول (الف)

30	35	38
31	32	41
36	35	44
45	37	38

- دیتای بالا را به چهار دسته 34-30، 39-35، 44-40، 49-45 تقسیم و کثرت هر دسته را بنویسید.
- طول و اوسط هر دستهٔ دیتای بالا را حساب کنید.
- کثرت تجمعی هر دسته را پیدا کنید.
- کثرت نسبی و فیصدی کثرت نسبی هر دسته را دریافت کنید.
- مجموعهٔ کثرت‌های نسبی تمام دسته‌ها برابر به چیست؟

2- صاحب یک مغازه در یک هفته تعدادی کارتن‌های بسکویت را قرار جدول زیر به فروش رسانده است:

شنبه	یک شنبه	دو شنبه	سه شنبه	چهار شنبه	پنج شنبه	جمعه
8	11	15	9	13	6	4

- دیتای فوق را به صورت گراف میله‌ای نشان دهید.

3- نمرات امتحان سالانهٔ صنف هفتم مریم قرار جدول زیر داده شده ا ست:

تربیت بدنی	ریاضی	ساینس	عربی	انگلیسی	تعلیمات اسلامی	دری	پشتو	هنر ها	علوم اجتماعی
76	92	82	75	85	90	95	80	88	84

- گراف نمرات مریم را به شکل خط منکسر رسم کنید.
- بیشترین نمره و کمترین نمره را مشخص کنید.

4- میزان در آمد مدیر، سرمعلم، معلمان، ماموران، تحویلداران و ملازمان یک مکتب در جدول قرار زیر آورده شده است:

شغل	در آمد بر حسب افغانی در ماه
مدیر مکتب	10000
سرمعلم	8000
4 نفر مامور	4000
25 نفر معلم	5000
2 نفر تحویلدار	3500
5 نفر ملازم	3000

• تعداد کارمندان (کثرت) را معین کنید
• حاصل ضرب هر دیتا را با کثرت آن حساب کنید.
• اوسط در آمد کارمندان را دریافت کنید.

5- یک متخصص زراعت اندازهٔ طول 500 بوته گندم را مورد مطالعه قرار داد از دیتا به دست آمده یک نمونه تصادفی 30 تایی را قرار زیر انتخاب نمود:

40	50	51	47	34	35	45	45
60	65	50	67	54	55	43	40
58	57	54	51	38	39	47	43
62	65	64	60	30	35		

• دیتای بالا را به صورت منظم بنویسید.
• این دیتا را دریک جدول به چهار دستهٔ 30-40 ، 40-50 ، 50-60 ، 60-70 تقسیم کنید.
• کثرت هر دسته را پیدا کنید.
• اوسط هر دسته را دریافت کنید.
• حاصل ضرب کثرت و اوسط هر دسته را بنویسید.
• اوسط دیتا را حساب کنید.

6- تعداد شاگردان یک صنف 25 نفر است که از ولایت‌های بادغیس، فاریاب، اورزگان، زابل و غور هستند اگر ولایت بادغیس را با عدد 1، ولایت فاریاب را با عدد 2 ، ولایت ارزگان را با عدد 3 ، ولایت زابل را با عدد 4 و ولایت غور را با عدد 5 نشان دهیم. دیتای زیر بر اساس محل تولد این شاگردان به دست آمده است.
جدول توزیع کثرت دیتا را تکمیل کنید.

5, 5, 3, 1, 5, 4, 3, 5, 1, 2, 1, 3, 5, 2
1, 5, 1, 2, 4, 1, 2, 1, 3, 2, 1

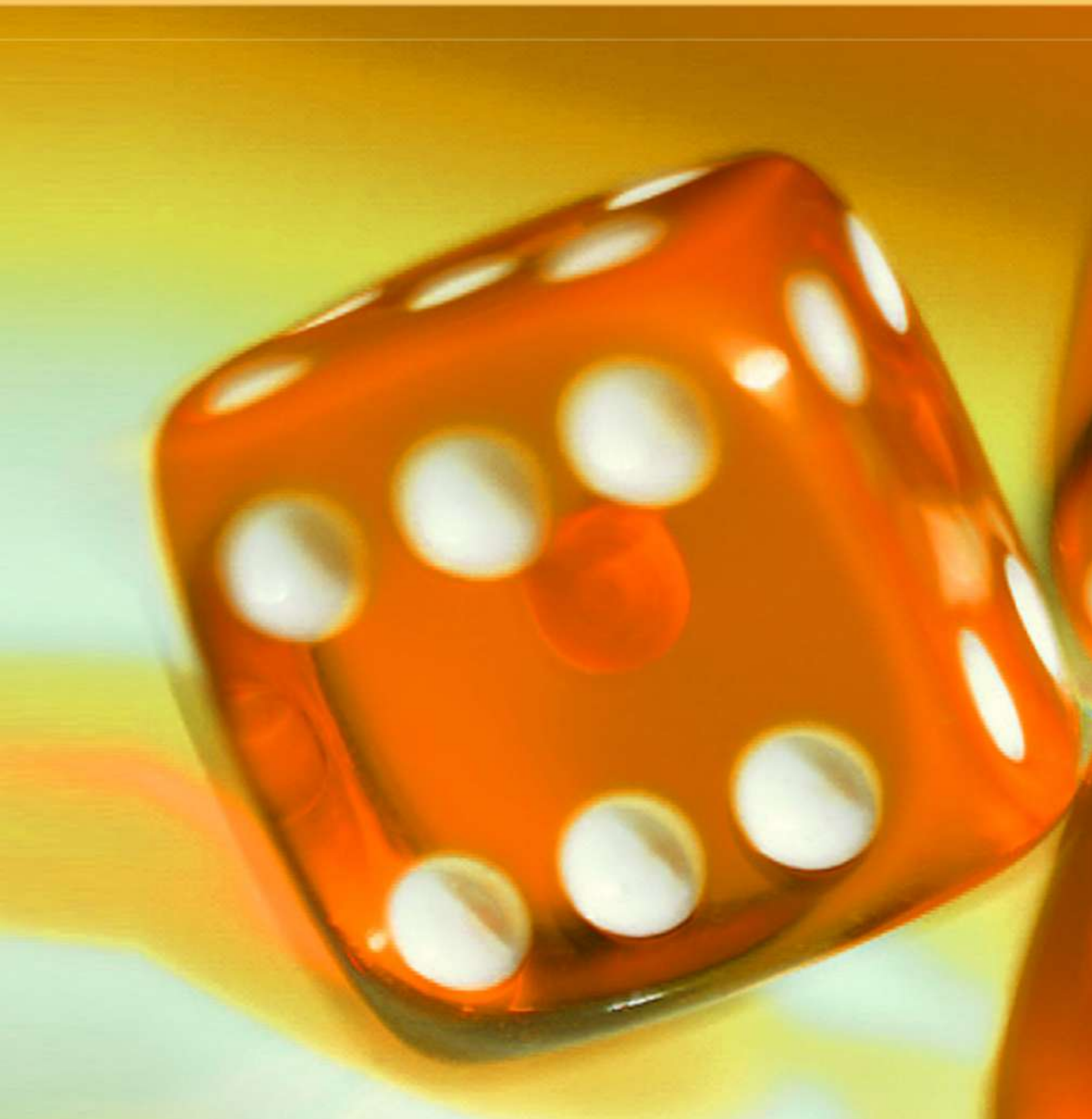
دسته	کثرت	کثرت نسبی	کثرت تجمعی
بادغیس			
فاریاب			
اورزگان			
زابل			
غور			

گراف میله یی این دیتا را رسم کنید.

فصل یازدهم

احتمال





کثرت نسبی و احتمال



چانس آمدن شمارهٔ 6 در دانهٔ رمل را پیشبینی کنید.
نسبت تعداد آمدن شمارهٔ 6 را در 30 بار انداختن دانهٔ رمل حساب کنید.
این اعداد چه چیز را برای ما نشان می دهد؟

فعالیت

در یک امتحان صنفی ریاضی 35 نفر اشتراک نموده بودند. بعد از ارزیابی به تعداد 7 نفر نمرات بالاتر از 90 (عالی)، 15 نفر بین 60 و 90 (بسیار خوب)، 8 نفر بین 50 تا 60 (خوب) و به تعداد 5 نفر پایینتر از 50 (ناکام) نمره گرفته اند.

- جدول کثرت را تشکیل نموده و کثرت نسبی شاگردان را برای درجات عالی، بسیارخوب، خوب و ناکام حساب کنید.
- فیصدی شاگردان ناکام در صنف چند فیصد است؟
- اگر یک شاگرد از بین صنف به اساس قرعه انتخاب گردد، دریافت کنید احتمال آن که شاگرد از گروپ شاگردان:

– عالی باشد.
– خوب باشد.
– ناکام باشد.

- نتایج احتمال انتخاب هر حالت فوق را با کثرت نسبی همان حالت مقایسه کنید.

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را به دست می آوریم:

- احتمال، قبل از وقوع حادثه برای پیشبینی یک حادثه، مورد استعمال قرار گرفته؛ اما کثرت نسبی بعد از انجام یک تجربه به اساس ارقام به دست آمده از انجام تجربهٔ اتفاقی حساب می گردد.
- احتمال تجربی برای یک حادثه اتفاقی مساوی به کثرت نسبی حادثه می باشد.
- چون مجموع کثرت نسبی تمام حالات مساوی به 1 است؛ بنابراین مجموع احتمال همه

حالات نیز مساوی به 1 می‌باشد.

مثال: در ماه قوس سال گذشته 10 روز ابری و بارانی بود.

a) کثرت نسبی روزهای ابری و بارانی را در ماه قوس دریافت کنید.

b) پیشگویی‌تان برای ماه قوس آینده چگونه خواهد بود؟

c) آیا این پیشگویی قطعی است که همه ساله در ماه قوس چنین خواهد بود؟

حل:

a) چون از جملهٔ 30 روز ماه قوس، به تعداد 10 روز آن بارانی یا ابری است؛ بنا بر این کثرت نسبی روزهای بارانی یا ابری برابر به $\frac{10}{30} = \frac{1}{3} \approx 0.33 = 33\%$ روزهای ماه می‌باشد.

b) پیشگویی برای ماه قوس آینده با در نظر داشت کثرت نسبی سال گذشته نیز مساوی به 30% خواهد بود.

c) این پیشگویی قطعی نبوده ممکن است بیشتر و یا کمتر از 10 روز در ماه قوس آینده بارانی و یا ابری باشند.

تمرین

1- در یک حادثهٔ اتفاقی E_1: "یک طفل متولد شده است"، کثرت نسبی حادثه؛ یعنی $h(E_1) = 0,51$ و احتمال این حادثه نیز $P(E_1) = 0,51$ را چگونه از هم می‌توانیم فرق نماییم؟ توضیح دهید.

2- رخصتی‌های تابستانی شاگردان همه ساله 10 روز اول ماه اسد می‌باشند، سال گذشته نسبت شدت گرمی رخصتی ها به تعداد 10 روز دیگر اضافه گردید، مطلوب است:
کثرت نسبی رخصتی‌های ماه اسد سال گذشته و مقایسهٔ آن با رخصتی‌های سال آیندهٔ تابستانی.

چانس برابر و نا برابر در یک فضای نمونه

از هر خریطه یک گلوله می گیریم.
از کدام خریطه گلوله را بگیریم تا چانس برآمدن گلوله به رنگ سبز بیشتر باشد؟



فعالیت

دو شاگرد با هم قرار می گذارند تا در یک بازی رمل شماره‌های 1 الی 6 را انتخاب کنند.

- آیا چانس آمدن شماره 1 الی 6 با هم برابر است؟
- هر گاه روی 2 سطح مکعبی دانه رمل شمارهٔ 6 حک شده باشد، در این صورت چانس انتخاب را در کدام حالت زیر به نفع خود می دانید؟
  - انتخاب شماره 6 باشد.
  - انتخاب نفر مقابل شماره 1 باشد.
- آیا احتمال شماره‌های 6 و 1 با هم برابر است؟

از فعالیت فوق نتیجهٔ زیر را به دست می آوریم:
تا به حال با حوادثی رو به رو بودیم که احتمال عناصر اولیه فضای نمونه با هم یکسان بودند، که بر اساس آن تعریف احتمال صورت گرفته است.
احتمال را به طور معمول به P نمایش داده و $P(A)$ احتمال حادثه اتفاقی A می باشد.
هر گاه یک فضای نمونه، n عنصر داشته باشد، در این صورت احتمال هر حادثهٔ اولیه E (غیر قابل تجزیه) مساوی به $P(E)=\frac{1}{n}$ می‌باشد.

مثال 1: پرتاب یک سکه راکه هر دو طرف آن شیر است در نظر می گیریم، مطلوب است احتمال آنکه سکه:

a) شیر بیاید.
b) خط بیاید.

c) آیا احتمال حوادث اتفاقی شیر و خط در مثال فوق باهم برابر هستند؟
حل: می‌دانیم که هر دو طرف سکه شیر بوده و فضای نمونه $S = \{\text{شیر}\}$ می‌باشد:

$$(a):\ P(\text{شیر}) = \frac{1}{1} = 1$$

$$(b):\ P(\text{خط}) = \frac{0}{1} = 0$$

(c) : هر دو طرف با هم، چانس برابر ندارند؛ زیرا در بالا دیده می‌شود که $1 \neq 0$

مثال 2: انداختن یک دانۀ رمل نورمال را در نظر می گیریم، چون فضای نمونۀ آن $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ بوده؛ بنا براین:

$$P(E) = P(\{6\}) = P(\{5\}) = P(\{4\}) = P(\{3\}) = P(\{2\}) = P(\{1\}) = \frac{1}{6} \approx 0.17 = 17\%$$

تمرین

1- از بین یک خریطه که در آن 3 گلوله به رنگ سرخ، 4 عدد آبی، یک عدد زرد قرار دارند، یک گلوله را به صورت اتفاقی می‌برداریم. مطلوب است احتمال آن‌که:
a) گلوله سرخ باشد.
b) گلوله زرد باشد.
c) گلوله آبی باشد.
d) اگر گلوله‌های سرخ رنگ از نگاه جسم، دو چند گلوله‌های زرد رنگ باشند، آیا احتمال برآمدن گلوله های سرخ و زرد با هم برابر است؟

2- حرف اول نام شاگردان یک صنف را جمع آوری نموده، نتیجه را در جدول شکل زیر درج نمودیم.

حرف اول نام شاگرد	کثرت مطلق تعداد شاگردان
م	9
ع	8
ف	5
ک	3
تعداد کل شاگردان	25

a) کثرت نسبی گروه شاگردان را به اساس حروف م، ع، ف و ک اسم شاگردان به دست آورید.
b) هر گاه یک تن از شاگردان را به حیث نماینده، به اساس قرعه انتخاب نماییم مطلوب است!
- احتمال این‌که اسم نمایندۀ صنف با حرف م آغاز شده باشد.
- احتمال این که نام نمایندۀ صنف با حرف ک شروع شده‌باشد.

حادثهٔ اتفاقی یک فضای نمونه



آسمان ابری است!
چه حادثه یی اتفاق خواهد افتاد؟

فعالیت

بکس جیبی احمد بین ساعات 10 الی 12 قبل از ظهر در یک نقطهٔ پر ازدحام شهر سرقت شده است. بعد از اطلاع به پولیس، مشاهدات اولی نشان می‌دهد که در عین وقت در محل سه نفر از کیسه برها به اسم‌های x, y و z که نزد پولیس سابقهٔ جرمی دارند، دیده شده‌اند. به خاطر شناسایی دزد، با پولیس همکاری نموده فعالیت زیر را انجام دهید.
احتمال این که بکس جیبی احمد را یک یا چند نفر از متهمان مشکوک به گونهٔ مشترک با هم دزدیده باشند، کدام ترکیب باید مورد تحقیق قرار گیرد؟
– اگر ست متهمان مشکوک را به $S=\{x, y, z\}$ نشان دهیم، کدام ست‌ها و یا ست‌های فرعی افراد مشکوک را می‌توانیم تشکیل نماییم.
– آیا احتمال این وجود دارد که متهمان مشکوک افراد بیگناه باشند؟ در این صورت ست حاصله را از نگاه ریاضی با کدام ست نشان دهیم؟

از فعالیت فوق به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

- در فعالیت فوق مشاهده نمودیم که ممکن است هر کدام از حالات فوق اتفاق افتد، بدین سبب آن را به نام حادثه اتفاقی یاد می‌نماییم.
- هر ست فرعی یک فضای نمونه S، یک حادثه اتفاقی بوده که به E نشان داده می‌شود.
- هر گاه تعداد عناصر یک فضای نمونه مساوی به n عنصر باشند، تعداد مجموع حوادث اتفاقی آن مساوی به 2^n می‌باشند.

مثال: برای فعالیت فوق حوادث اتفاقی فضای نمونه $S=\{x,y,z\}$ را دریافت کنید.
حل: حوادث اتفاقی فضای نمونهٔ فوق یا به عبارت دیگر فهرست ست‌های فرعی فضای نمونه S عبارت اند از:

$E_1=\{x\}$	حادثه یی که تنها x دزد باشد.
$E_2=\{y\}$	حادثه یی که تنها y دزد باشد.
$E_3=\{z\}$	حادثه یی که تنها z دزد باشد.
$E_4=\{x,y\}$	حادثه یی که x و y دزد باشند.
$E_5=\{x,z\}$	حادثه یی که x و z دزد باشند.
$E_6=\{y,z\}$	حادثه یی که y و z دزد باشند.
$E_7=\{x,y,z\}$	حادثه یی که x، y و z دزد باشند.
$E_8=\{\quad\}=\emptyset$	حادثه یی که هیچ کدام از x ، y و z دزد نباشند.

از مثال فوق نتیجه یی برای حوادث اتفاقی که مساوی به $2^3=8$ می‌باشد به دست می آید که برای تعداد حوادث اتفاقی یک فضای نمونهٔ 3 عنصره، از قانون طاقت استفاده گردیده است.

تمرین

1- در پرتاب یک سکه، تعداد حوادث اتفاقی را فهرست کنید.
2- چهار حزب C, B, A و D که در انتخابات پارلمانی اشتراک دارند می خواهند تا باهم اتحاد ممکن را به خاطر پیروزی به وجود آورند.
- تمام حالت‌های ممکن اتحاد ویا اشتراک مستقل آن‌ها را فهرست کنید.
- اشتراک مستقلانهٔ هر حزب و حادثه اتفاقی ناممکن یا $\emptyset$ به نظرتان از نگاه اتحاد چگونه قابل توضیح اند؟

3- با یک مثال برای فضای نمونه $S=\{A,B,C,D\}$ حادثهٔ اتفاقی نا ممکن($\emptyset$) و حادثهٔ اتفاقی مطمئن S را توضیح دهید.

قواعد احتمال



• آیا در میدان کرکت هر چه دل بازیگر خواست می‌تواند با توپ انجام دهد؟
• آیا قواعدی در مورد وجود دارد یا نه؟

فعالیت

مانند بازی کرکت برای پیشبرد تیوری علم احتمال از طرف دانشمندان مربوط با در نظر داشت مسائل تجربی، نیز قواعدی وضع گردیده است، سعی کنید آن‌ها را دریابید.

• آیا می‌توانید بگویید که احتمال یک حادثهٔ اتفاقی هر عدد مثبت باشد؟
• چرا احتمال یک عدد کوچکتر از یک است؟ توضیح دهید.
• آیا احتمال یک حادثه اتفاقی می‌تواند یک عدد منفی باشد؟
• آیا احتمال دو حادثهٔ اولیهٔ یک فضای نمونه مساوی به مجموع احتمال‌های حوادث اولیه می‌باشد یا خیر؟
• آیا احتمال حوادث نا ممکن و مطمئن را می‌دانید؟ به زبان ریاضی بنویسید.

از فعالیت فوق نتایج زیر را به دست می‌آوریم:

1- احتمال حادثهٔ اتفاقی E همیشه بین 0 و 1 است؛ یعنی: $0 \le P(E) \le 1$

2- هر گاه S یک فضای نمونه باشد، $P(S) = 1$

حادثهٔ اتفاقی S به نام حادثهٔ مطمئن نیز یاد می گردد.

3- برای حادثهٔ نا ممکن داریم: $P(\emptyset) = 0$

مثال: فضای نمونه چهار بار پرتاب دوسکه؛ یعنی $S = \{TT, TH, HT, HH\}$ را در نظر می گیریم.(خط $= T$، شیر $= H$) احتمال حوادث زیر مطلوب است:

a) هر دو سکه شیر باشند.

b) یک سکه شیر باشد.
c) هر دو سکه یکسان باشند.
d) هر دو سکه یکسان نباشند.
e) هیچ کدام از سکه‌ها خط نباشند.

حل : داریم که:

a) برای هر دو سکه شیر باشند، حادثهٔ اتفاقی عبارت است از: $E_1 = \{HH\}$ است؛بنابراین:

$$P(E_1) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

b) یک سکه شیر باشد $E_2 = \{TH, HT\}$ ؛ بنابراین:

$$P(E_2) = \frac{2}{4} = 0.5 = 50\%$$

c) برای هر دو سکه یکسان حادثه اتفاقی عبارت است از: $E_3 = \{TT, HH\}$ ؛ بنابراین:

$$P(E_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

d) برای هر دو سکه یکسان نباشد عبارت است از: $E_4 = \{TH, HT\}$ ؛ بنابراین:

$$P(E_4) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

e) برای هیچ کدام از سکه‌ها خط نباشد عبارت است از: $E_5 = \{HH\}$ ؛ بنابراین:

$$P(E_5) = \frac{1}{4} = 0.25 = 25\%$$

تمرین

جواب سؤال‌های زیر را در خانه خالی با علامت ✓ نشانی کنید.

۱– هر گاه S فضای نمونهٔ یک تجربهٔ تصادفی و E یک حادثهٔ اتفاقی باشد، در این صورت احتمال E مساوی است به:

☐ a) $P(E) = \frac{E}{S}$ ☐ b) $P(E) = \frac{\text{تعداد عناصر } E}{\text{تعداد عناصر } S}$

2– اگر A یک حادثه اتفاقی باشد؛ پس:

☐ a) $P(A) \geq 1$ ☐ b) $0 \leq P(A) \leq 1$

3– اگر S یک فضای نمونه باشد، کدام جزء زیر درست است؟

☐ a) $P(S) = 0$ ☐ b) $P(S) = 1$

4– احتمال یک پیشامد نا ممکن برابر است با:

☐ a) $P(\varnothing) = 0$ ☐ b) $P(\varnothing) = 1$

دیاگرام درختی

چگونه می توان به نقطهٔ A رسید؟



فعالیت

• گراف شجرهٔ نسب فامیلی خود را از بابه کلان پدرتان شروع نموده، تا خود تان ترسیم کنید.

• از یک دریا یک کانال جدا می‌شود. کانال از نقطهٔ O گذشته، به 3 مسیر مختلف که با هم زاویهٔ نزدیک به 30 درجه را تشکیل می‌دهند و هرکدام از 3 مسیر، به 3 نقطهٔ جداگانه B, A و C می‌رود از آن‌جا به ترتیب از هرنقطه به سه منطقهٔ (3,2,1)، (6,5,4)، (9,8,7) می‌رسند. گراف پلان فوق را ترسیم کنید.

• هر گاه یک سکه را سه مرتبه پرتاب نماییم، می‌دانیم که در برابر هر حالت ممکن شیر و یا خط در پرتاب اول، به تعداد 2 حالت ممکن شیر و خط در پرتاب دوم وجود دارند، بعد در پرتاب سومی برای هر نتیجهٔ ممکنی که به‌وجود آمده است، دو حالت شیر و خط وجود دارد. موضوع را توسط یک گراف ترسیم کنید.

• در هر مبدأ مجموع احتمالات شاخچه ها چند است؟

• نتیجهٔ احتمال‌های حوادث اولیه را با حاصل ضرب احتمالات شاخچه‌هایی که در مسیر قرار دارند، مقایسه کنید.

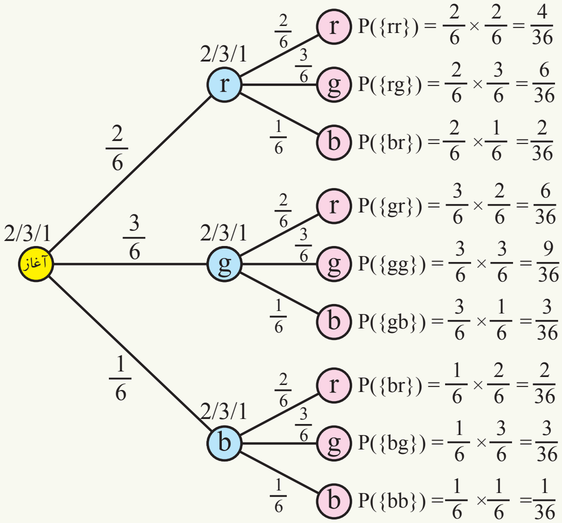
از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

• هر تجربهٔ تصادفی را می‌توان توسط یک دیاگرام که از نقطهٔ شروع یک تجربه آغاز می گردد، به تعداد نتایج ممکن شاخچه ها را ترسیم نماییم، برای انجام مرتبهٔ دوم، تجربه را بار دیگر مانند قدم اول، به هر نتیجه ممکنه شاخچه‌ها ترسیم می گردد. گراف مذکور را که مانند درخت، شاخ و پنجه می کند، به نام دیاگرام درختی یاد می کنند.

• حاصل جمع احتمالات در هر نقطهٔ انتشار شاخچه ها به طور حتمی مساوی به 1 است.

• حاصل جمع احتمالات تمام حوادث اولیه نیز مساوی به 1 می باشد.

مثال: در یک خریطه 6 مهره قرار دارد. 2 مهره به رنگ سرخ (r) ، 3 مهره به رنگ سبز (g) و 1 مهره به رنگ سیاه (b). دو مهره از بین خریطه یکی پی دیگری گرفته می‌شود و بعد از مشاهده دو باره به خریطه گذاشته می‌شود. احتمال تمام حوادث اولیهٔ تجربه را تعیین کنید.



توجه داشته‌باشید اعداد روی هر نقطهٔ انتشار نشان دهندهٔ تعداد مهره‌ها در هر مرحله و اعداد روی هر شاخه، احتمال هر حادثهٔ اتفاقی را در هر مرحله نشان می‌دهد.احتمالات به دست آمده را برای حوادث مربوطه، در جدول زیر می‌نویسیم، به خاطر این که سهولت در مقایسهٔ احتمالات حوادث، داشته باشیم تمام احتمال ها را با مخرج واحد بدون اختصار می آوریم.

w	rr	rg	rb	gr	gg	gb	br	bg	bb
P({w})	$\frac{4}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$

تمرین

1- هر گاه یک سکه سه بار پی هم پرتاب شود، احتمال و نتایج ممکنهٔ حوادث زیر را توسط دیاگرام درختی حساب کنید.

احتمال این که:

a) یک بار آن خط باشد.

b) دو بار آن خط باشد.

c) حداقل یک بار آن خط باشد.

d) یک شیر باشد.

e) حد اکثر یک شیر باشد.

قاعدهٔ اول مسیر (حاصل ضرب)



گودی از کدام مسـیر می تواند از بین حصار ها خارج شود؟

فعالیت

گراف درختی شجرهٔ نسب تان‌را از پدر کلان پدر، شروع تا خوردترین عضوی که به خانوادهٔ پدر کلان پدرتان تعلق دارد، رسم کنید.

- مسیر ارتباط خودتان را با پدر کلان تان به رنگ سرخ مشخص کنید.
- مسیر ارتباط پسر کاکای تان را با پدر کلان تان مشخص کنید.

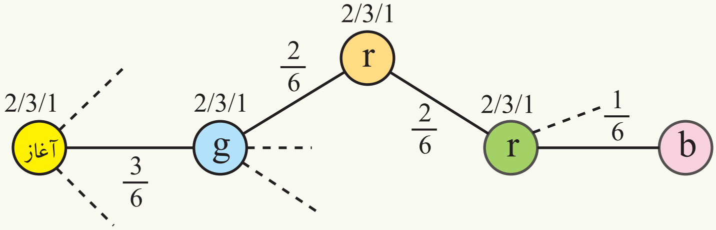
از فعالیت فوق نتیجه زیر را به دست می آوریم:

- هر مسیر ما را به یک نتیجهٔ جدا گانه می‌رساند.
- هر مسیر گراف درختی در انجام یک تجربه به یک حادثهٔ اتفاقی اولیه می‌انجامد.
- رسیدن به هر حادثهٔ اتفاقی اولیه، از مسیرهای مختلف و نقاط انتشار مختلف عبور می کند.
- احتمال یک حادثهٔ اولیه عبارت از حاصل ضرب احتمال ها از آغاز مسیر تا حادثه می‌باشد.

مثال: دیاگرام درختی را که برای کشیدن یک مهره از بین یک خریطهٔ که در آن 2 مهره به رنگ سرخ (r)، 3 مهره به رنگ سبز (g) و یک مهره به رنگ سیاه (b) قرار دارند، در نظر می گیریم. حال اگر تجربه را 4 مرتبه تکرار نماییم طوری که مهره بعد از گرفتن، دوباره به خریطه گذاشته می‌شود و مطلوب احتمال حادثهٔ، $w = \{grrb\}$ (سبز سرخ سرخ سیاه) باشد.

حل: در این صورت ضرور نیست تمام دیاگرام را در چهار مرحلهٔ شکل به صورت مکمل ترسیم نماییم؛ بلکه همان مسیری را در نظر می گیریم که ما را به حادثهٔ اتفاقی مطلوب می‌رساند و احتمال حادثه از طریق مسیر مذکور عبارت از حاصل ضرب احتمال‌هایی که در

مسیر تا حادثه قرار دارند، می‌باشند.



بنا بر این به کمک اولین قاعدهٔ مسیر قیمت احتمال حادثهٔ مذکور عبارت است از:

$$P(\{w\}) = P(\{grrb\}) = \frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{12}{1296} = 0.0092 = 0.92\%$$
$$\Rightarrow P(\{w\}) = 0.0092 = 0.92\%$$

یعنی احتمال برآمدن مهرهٔ (سبز، سرخ، سرخ، سیاه) 0.92% می‌باشد.

تمرین

۱- در مثال برداشتن مهره از خریطه، که در بالا کار شد، احتمال حوادث اتفاقی زیر را با استفاده از قاعدهٔ اول مسیر دریافت کنید.

- $w_1 = \{gbbr\}$
- $w_2 = \{rggb\}$
- $w_3 = \{brrg\}$

نکات مهم فصل

• **کثرت نسبی و احتمال:** کثرت نسبی یک تجربه عبارت از نسبت کثرت مطلق نظر به تعداد کل دفعات انجام یک تجربه می‌باشد؛ اما احتمال یک حادثه قبل از وقوع آن پیش‌بینی می گردد.

کثرت نسبی حادثه A را به $h(A)$ نشان داده و $0 \leq h(A) \leq 1$ می‌باشد.

مانند احتمال $h_n(\phi) = 0$ و $h_n(S) = 1$ می‌باشد.

• **چانس برابر:** حوادثی که در انجام یک تجربهٔ تصادفی یکی بر دیگری هیچ گونه برتری و یا هم شرایطی برای وقوع چانس بیشتر آن در یک فضای نمونه نداشته باشند، به نام حوادث با چانس برابر یاد می گردند.

مثال: آمدن شماره‌های رمل حوادث اتفاقی اولیه دارای چانس برابر مساوی به $\frac{1}{6}$ می‌باشد.

• **حادثهٔ اتفاقی:** هرست فرعی یک فضای نمونه به حیث حادثهٔ اتفاقی، همان تجربه می‌باشد. ست خالی یک حادثهٔ اتفاقی نا ممکن و S یک حادثهٔ اتفاقی مطمئن می‌باشد.

• **قواعد احتمال:** هر گاه E یک حادثهٔ اتفاقی یک فضای نمونهٔ S باشد:

1) $0 \leq P(E) \leq 1$

3) $P(\phi) = 0$, $P(S) = 1$

• **دیاگرام‌های درختی:** هر تجربهٔ تصادفی از نقطهٔ شروع به شاخچه‌های حوادث ممکن اتفاقی جدا تقسیم می‌شوند. با انجام مرتبهٔ دوم آن، مانند قدم اول به هر نتیجهٔ ممکنه به حیث نقطهٔ آغاز بار دیگر شاخچه‌های حوادث اتفاقی گراف رسم می گردد. به همین ترتیب روش ادامه می‌یابد. احتمال هر حادثهٔ اولیه به دست آمده، عبارت از حاصل ضرب احتمالات هر بند شاخچه‌هایی که از نقطهٔ آغاز روی مسیر مطلوب ما را به انجام آن می‌رساند می‌باشد.

• حاصل جمع احتمالات در هر نقطهٔ انتشار شاخچه‌ها، مساوی به 1 است.

• حاصل جمع احتمالات تمام حوادث اولیهٔ یک تجربهٔ اتفاقی نیز مساوی به 1 می‌باشند.

• **قاعدهٔ اول مسیر احتمالات**

احتمال هر حادثهٔ اتفاقی اولیه در پایان هر مسیر معین در گراف درختی مساوی به حاصل ضرب احتمالات هر شاخچه از طریق مسیر مطلوب می‌باشد.

تمرین عمومی

1- هرگاه 200 مرتبه یک سکه پرتاب شود و از جمله به تعداد 92 بار شیر بیاید در این صورت کثرت نسبی حوادث زیر را به دست آورید:

- سکه شیر بیاید.
- سکه خط بیاید.
- مجموع کثرت نسبی شیر آمدن و خط آمدن چند است، بدون محاسبه جواب دهید.

2- هرگاه کثرت مطلق روزهای بارانی در سال 62 روز باشد مطلوب است:

- کثرت نسبی روزهای بارانی در سال. (هرگاه سال 365 روز در نظر گرفته شود).
- کثرت نسبی روز این که بارانی باشد.
- احتمال این که یک روز بارانی باشد.
- کثرت نسبی و احتمال برای یک روز بارانی را توضیح دهید.

3- در انداختن یک دانه رمل فضای نمونه را تشکیل نموده حوادث اتفاقی که دارای چانس برابر می‌باشند فهرست کنید.

4- یک دانه رمل و سکه را پرتاب نموده مطلوب است دیاگرام درختی و فضای نمونه تجربه دریافت کنید احتمال این که سکه شیر و دانه رمل 6 آمده باشد ؟

5- از بین دو پیراهن {سیاه و سفید} که در یک الماری اتاق تاریک قرار دارند 3 مرتبه پیراهن انتخاب می‌نماییم (با واپس گذاشتن) دریافت کنید احتمال آن که:

(E_1) : دومین پیراهن سیاه باشد.

(E_2) : فقط دومین پیراهن سیاه باشد

(E_3) : حداقل یک پیراهن سیاه باشد

(E_4) : حداعظمی یک پیراهن سیاه باشد

(E_5) : اولین و یا آخرین پیراهن سیاه باشد

(E_6) : اولین پیراهن سیاه و یا آخرین پیراهن سیاه باشد.

1- در یک الماری 5 کتاب ریاضی و 6 کتاب فزیک قرار دارند. به صورت تصادفی از بین آن‌ها 6 کتاب انتخاب می کنیم؛ در یافت کنید احتمال این که دوکتاب ریاضی باشد؟